Probabilità e Statistica

a.a. 2017/2018

C.d.L.: Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni, Ingegneria Informatica

Calcolo combinatorio

Marco Pietro Longhi

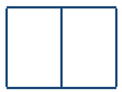
Dati n oggetti distinti, si dicono *disposizioni semplici di* n *oggetti di classe* k, tutti i gruppi che si possono formare di k elementi, in modo che due gruppi differiscano

- o per l'ordine,
- o per almeno un elemento.

$$D_{n,\,k} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Esercizio 1. Quanti numeri di due cifre distinte si possono formare con gli elementi dell'insieme $A = \{1,\, 5,\, 3,\, 8\}$?

Risoluzione.



$D_{4,\,2} = \frac{4!}{2!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2!}{2!} = 12.$

Dati n oggetti distinti, si dicono *disposizioni con ripetizioni di classe* k, tutti i gruppi che si possono formare di k elementi, con la possibilità di ripetizione degli elementi, in modo che due gruppi differiscano

- o per l'ordine,
- o per almeno un elemento,
- o per la ripetizione.

$$D^*_{n,\,k} = n^k.$$

Esercizio 2. Quanti numeri di due cifre si possono formare con gli elementi dell'insieme $A = \{1,\,5,\,3,\,8\}$?

Risoluzione.

$D^*_{4,\,2} = 4^2 = 16$.

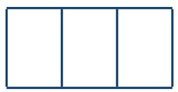
Dati n oggetti distinti, si dicono *permutazioni semplici di n elementi*, tutti i gruppi che si possono formare con gli n elementi, in modo che due gruppi differiscano

- per l'ordine degli elementi.

$$P_n = D_{n,\,n} = n!.$$

Esercizio 3. In quanti modi 3 diverse persone possono sedersi sulle 3 poltrone di una fila di un palco a teatro?

Risoluzione.



$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$=6.

–

Dati n oggetti distinti, si dicono *combinazioni semplici di n oggetti di classe k*, tutti i gruppi che si possono formare con k degli n elementi, in modo che due gruppi differiscano

- per almeno un elemento.

$$C_{n,\,k} = \frac{D_{n,\,k}}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right).$$

Esercizio 4. Un barman ha a disposizione 4 liquori base, quanti cocktails può ottenere mescolandone 3 alla volta?

Risoluzione.

$$C_{4,\,3} = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array}\right) = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4.$$

Vogliamo disporre 5 oggetti ($k = 5$) in 3 scatole distinte ($n = 3$).
In quanti modi diversi lo possiamo fare?

Iniziamo a fare lo schema di una possibile configurazione

$$\underline{* * * \;\Big|\quad\Big|\; * *}$$

Lo schema rappresenta la sequenza: nella prima scatola tre oggetti, nella seconda nessun oggetto, nella terza scatola due oggetti

Ma quante sono le configurazioni possibili?

Consideriamo i 7 simboli che formano lo schema:

5 asterischi * ($k = 5$),
2 separatori | ($n - 1 = 2$),
totale $n + k - 1 = 7$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ * & * & * & | & | & * & * \\ \hline \end{array}$$

Ogni permutazione dei 7 simboli rappresenta una configurazione.

Ad esempio la permutazione

$$\underline{* \;\Big|\; * * \;\Big|\; * *}$$

corrisponde ad un solo oggetto nella prima scatola e due in ciascuna delle altre due.

Lo schema

$$\underline{\quad\Big|\quad\Big|\; * \;\; * \;\; * \;\; * \;\; * \quad}$$

descrive la configurazione: tutti e cinque gli oggetti nella terza scatola.

Ma se permutiamo fra loro i $k = 5$ asterischi “$*$” la configurazione non cambia; allo stesso modo se permutiamo fra loro gli $n - 1 = 2$ separatori “$|$”.

Quindi le configurazioni distinte possibili sono

$$\frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k} = C_{n+k-1,\,k}.$$

Dati n oggetti distinti, si dicono *combinazioni di* n *oggetti con ripetizione di classe* k, tutti i gruppi che si possono formare con k degli n elementi, con la possibilità di ripetizione degli elementi, in modo che due gruppi differiscano

- o per almeno un elemento,
- o per la ripetizione.

$$C^*_{n,\,k} = \binom{n+k-1}{k} = C_{n+k-1,\,k}.$$

–

Esercizio 5. Sia $A = \{\nabla, \otimes\}$ quante sequenze di 3 simboli si possono formare scegliendo gli elementi in A?

Risoluzione. Le sequenze possibili sono $\nabla\nabla\nabla$, $\nabla\nabla\otimes$, $\otimes\nabla\otimes$, $\otimes\otimes\otimes$, ricordiamo che la sequenza $\nabla\nabla\otimes$ coincide con la sequenza $\nabla\otimes\nabla$ in quanto entrambe hanno $2\,\nabla$ e $1\,\otimes$. Ne segue

$$C^*_{2,\,3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4.$$

Usando lo schema “scatole - oggetti”, i simboli ∇, $\otimes$ sono le “scatole”.
Lo schema

$$\begin{array}{c|c} * \, * & * \\ \hline \nabla & \otimes \\ \hline \end{array}$$

rappresenta la sequenza $\nabla\nabla\otimes$.

Ad esempio, la sequenza $\otimes \otimes \otimes$ é rappresentata dallo schema

$$\begin{array}{c|c} & * \;\; * \;\; * \\ \hline \nabla & \otimes \\ \hline \end{array}$$

Pertanto le terne possibili sono:

$$C^{*}_{2,\,3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4.$$

–

Esercizio 6. In una partita di calcio fra amici Giorgio, Marco e Luca segnano complessivamente 7 reti. Quante sono le possibili distribuzioni delle reti fra loro?

Risoluzione.

G	M	L

Le “scatole” rappresentano i tre amici, mentre l’asterisco $*$ “rappresenta la rete”.

La sequenza: una rete segnata da Giorgio, quattro da Marco e due da Luca é rappresentata dallo schema

$*$	$*\ *\ **$	$**$
G	M	L

Pertanto le sequenze di reti possibili sono:

$$C^*_{3,\,7} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{9!}{7! \cdot 2!} = 36.$$

Esercizio 7. In quanti modi diversi 3 fratelli si possono spartire 8 cioccolatini?

Risoluzione.
Le “scatole” rappresentano i tre fratelli, mentre l’asterisco $*$ “rappresenta il cioccolatino”.

Ad esempio, la sequenza: il primo fratello prende 5 cioccolatini, uno il secondo e due il terzo é rappresentata dallo schema

$$\begin{array}{c|c|c} * \; * \; * \; * \; * & * & * \, * \\ \hline \end{array}$$

Le possibili “distribuzioni di cioccolatini” quindi sono:

$$C^*_{3,\,8} = \left(\begin{array}{c} 10 \\ 8 \end{array} \right) = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = 45.$$

–

Dati n oggetti di cui r_1 uguali tra loro, r_2 uguali tra loro e distinti dai precedenti, ..., r_k uguali tra loro e distinti dai precedenti, con

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n,$$

si dicono *permutazioni con ripetizione di* $r_1 + r_2 + \ldots + r_k$ *oggetti*, tutti i gruppi che si possono formare con gli n elementi, di cui alcuni indistinguibili in modo che due gruppi differiscano

- per l'ordine.

$$P^*_{r_1,\, r_2,\, \ldots,\, r_k} = \frac{(r_1 + r_2 + \ldots + r_k)!}{r_1! r_2! \ldots r_k!}$$

Esercizio 8. Quanti sono gli anagrammi della parola AF**A**?

Risoluzione. Si ha $r_1 = 2$, $r_2 = 1$. Quindi il numero degli anagrammi è $P^*_{2,\,1} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$. Infatti, gli anagrammi possibili sono,

AF**A**, A**A**F, FA**A**

–

Esercizio 9. Si supponga di avere un'urna con 40 numeri distinti e di estrarne 6.
Quanti sono i casi possibili se

9.1 l'estrazione avviene senza reinserimento e la sequenza delle estrazioni caratterizza la sestupla estratta;

Risoluzione. Si tratta di *disposizioni semplici di* 40 *oggetti di classe* 6

$$D_{40,\,6} = 40 \cdot 39 \cdot \ldots \cdot (40 - 6 + 1) = \frac{40!}{(40-6)!} = \frac{40!}{(34)!} = 2763633600.$$

9.2 l'estrazione avviene senza reinserimento e la sequenza delle estrazioni NON caratterizza la sestupla estratta;

Risoluzione. Si tratta di *combinazioni semplici di* 40 *oggetti di classe* 6

$$C_{40,\,6} = \left(\begin{array}{c} 40 \\ 6 \end{array} \right) = 3838380.$$

–

9.3 l'estrazione avviene con reinserimento e la sequenza delle estrazioni caratterizza la sestupla estratta;

Risoluzione. Si tratta di *disposizioni di* 40 *oggetti con ripetizione di classe* 6

$$D^*_{40,\,6} = 40^6 = 4096000000.$$

9.4 l'estrazione avviene con reinserimento e la sequenza delle estrazioni NON caratterizza la sestupla estratta.

Risoluzione.
Si tratta di *combinazioni di* 40 *oggetti con ripetizione di classe* 6

$$C^*_{40,\,6} = \left(\begin{array}{c} 45 \\ 6 \end{array}\right) = \frac{45!}{6! \cdot 39!} = 8145060.$$

–

In generale data un'urna con n numeri distinti, se vogliamo estrarre una k-pla, il numero dei gruppi possibili, in base alle quattro modalitá di estrazione, é riassunto nel seguente schema

	senza reinserimento	con reinserimento
gruppi ordinati	$D_{n,\,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$D^*_{n,\,k} = n^k$
gruppi non ordinati	$C_{n,\,k} = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$	$C^*_{n,\,k} = \left(\begin{array}{c} n+k-1 \\ k \end{array} \right)$

Esercizi

Esercizio 10. In quanti modi diversi quattro persone possono occupare quattro di cinque posti numerati?

$$[120]$$

Esercizio 11. Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

1. Quanti numeri di tre cifre distinte si possono formare con i numeri dell'insieme A?
2. quanti di questi numeri sono dispari?
3. quanti terminano con 9?
4. quanti sono maggiori di 700?

$$[504,\ 280,\ 56,\ 168]$$

Esercizio 12. Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

1. Quanti numeri di tre cifre anche ripetute si possono formare con i numeri di A?
2. quanti di questi numeri sono dispari?
3. quanti sono maggiori di 700?

$$[729,\ 405,\ 243]$$

[Liberamente tratto da “Elementi di Termodinamica Statistica” Dip. Scienza dei Materiali - Universitá di Milano Bicocca]

Esercizio 13. Consideriamo un sistema composto da 5 particelle con spin $s = \frac{1}{2}$, il quale puó essere orientato in posizione *up* $(\uparrow)$ o in posizione *down* $(\downarrow)$. Supponiamo che le particelle non interagiscano fra loro (indipendenza).

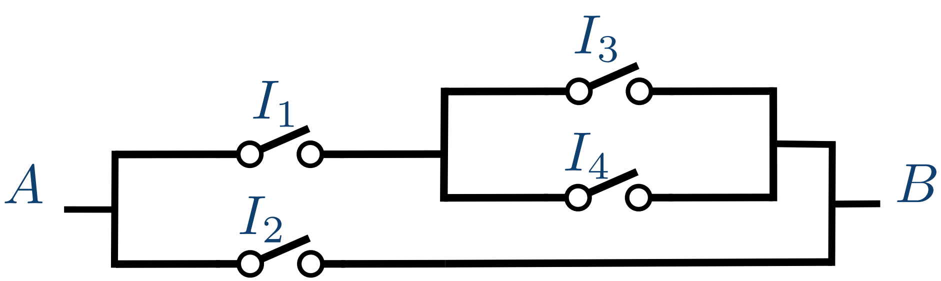
a) Quante sono le configurazioni che presentano 3 spin *up* ?

b) e 2 spin *up* ?

$[10,\ 10]$

[Tratto da “Elementi di Termodinamica Statistica” Dip. Scienza dei Materiali - Universitá di Milano Bicocca]

Esercizio 14. Nel circuito in figura gli interrutori $(I_i, i = 1, 2, 3, 4)$ posso essere o aperti (0) o chiusi (1). Quante sono le possibili configurazioni che permettono il passaggio di corrente tra A e B?



$[11]$

–

Esercizio 16. Quanti sono i numeri di tre cifre che si possono formare con i numeri $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ costituiti da

1. cifre tutte distinte?
2. cifre anche ripetute?

$$[448, \; 648]$$

Esercizio 17. Quanti anagrammi si possono formare con la parola DERIVATO? quanti di questi anagrammi finiscono con ATO?

$$[40320, \; 120]$$

Esercizio 18. Quanti anagrammi si possono formare con la parola STATISTICA? quanti di questi anagrammi iniziano per S?

$$[75600, \; 15120]$$

Esercizio 19. In quanti modi si possono distribuire 5 quaderni uguali a 4 bambini?

$$[56]$$

–

Esercizio 20. Le iniziali del nome e del cognome di una persona si dicono "'cifre"'e vengono stampate sulla copertina di un'agenda. Se si vogliono preparare gli stampi per tutte le cifre che si possono formare con le 26 lettere dell'alfabeto internazionale, quanti stampi é necessario disporre?

$[676]$

Esercizio 21. Quanti terni si possono formare con i 90 numeri del lotto?

$[117480]$

Esercizio 22. A un concorso per due posti di impiegato, rispettivamente negli uffici del magazzino e del personale di un'azienda partecipano 15 concorrenti. In quanti modi possibili tra i concorrenti vi possono essere due vincitori?

$[210]$

–

Esercizio 23. (Tema d'esame del 05/07/16-C1) A un concorso con 3 posti partecipano 10 concorrenti. Quali sono le possibili terne di vincitori?

$$[120]$$

Esercizio 24. Determinare quanti colori si possono ottenere combinando in tutti i modi possibili i sette colori dell'iride.

$$\left[\sum_{k=1}^{7} C_{7,\,k}\right]$$

Esercizio 25. I geni (cioè i portatori di caratteri ereditari) compaiono in coppia in ogni cellula di un individuo. Nel caso più semplice ogni gene può presentarsi sotto due forme distinte (dette *alleli*) che indichiamo con A_1 ed A_2. Possiamo allora rappresentare questi tre tipi diversi di geni (detti *genotipi*) come

$$A_1\,A_1\,, \quad A_1\,A_2\,, \quad A_2\,A_2\,.$$

Quanti genotipi fornisce un gene con tre alleli?

$$[6]$$

Esercizio 26. (Tema d'esame del 06/09/05-C3) Una serratura si apre con un codice decimale di tre cifre. Sapendo che due cifre sono dispari, scelte tra $\{1,3,5,7,9\}$, e una pari, scelta tra $\{0,2,4,6\}$, trovare il numero massimo di tentativi che bisogna effettuare per aprire la serratura.

$[300]$

Esercizio 27. Sei amici, tre uomini e tre donne, si recano a teatro dove hanno prenotato una fila di 6 posti consecutivi. Se si vogliono sedere alternandosi uomini e donne, quante sono le possibili sistemazioni?

$[72]$

Esercizio 28. Una vettura ferroviaria ha 6 posti nel verso di marcia e 6 nel senso contrario, in quanti modi si possono disporre 6 viaggiatori di cui 4 vogliono sedersi nel senso di marcia e 2 nel senso opposto?

$[10800]$

–

Esercizio 29. In quanti modi un gruppo di sette persone si può disporre

1. in sette sedie allineate?
2. intorno ad un tavolo circolare?

$$[5040,\ 720]$$

Esercizio 30. (Tema d'esame del 26/08/15-C6) In quanti modi si possono mettere in fila 4 ragazzi e 3 ragazze in modo che i ragazzi siano tutti vicini tra loro e le ragazze tutte vicine tra loro?

$$[288]$$

Esercizio 31. Un'agenzia turistica organizza viaggi che prevedono la visita a quattro fra dieci prestabilite città. Calcolare

1. in quanti diversi modi un turista può scegliere le quattro città;
2. in quanti diversi modi l'agenzia può fissare gli itinerari.

$$[210,\ 5040]$$

–

Esercizio 32. Quanti numeri con meno di 5 cifre si possono formare, se si vuole che abbiano tutte le cifre dispari?

$[780]$

Esercizio 33. Un'urna contiene dieci palline bianche e cinque nere. Determinare in quanti modi quattro palline possono essere estratte dall'urna nell'ipotesi che esse

1. possano essere di qualsiasi colore;
2. debbano essere due bianche e due nere;
3. debbano essere tutte bianche;
4. debbano essere tutte nere;
5. debbano essere dello stesso colore.

$[1365,\ 450,\ 210,\ 5,\ 215]$

Esercizio 34. Considerando un mazzo di quaranta carte, calcolare quante possibili coppie si possono formare estraendo

1. due carte contemporaneamente;
2. due carte successivamente senza rimettere la prima carta estratta nel mazzo;
3. due carte successivamente rimettendo la prima carta nel mazzo.

$$[780,\ 1560,\ 1600]$$

Esercizio 35. Date nel piano 12 rette determinare il numero dei punti di intersezione sapendo che 5 sono parallele e le rimanenti sono a due a due incidenti.

$$[56]$$

Esercizio 36. (Tema d'esame del 05/07/11-C3)
Per aprire una porta blindata, occorre digitare un codice segreto formato da due vocali distinte seguite da tre cifre scelte tra $\{0, ..., 9\}$. Calcolare il numero di codici che contengono almeno una delle cifre $0, 1, 2$.

$[13140]$

Esercizio 37. (Tema d'esame del 09/06/15-C1)
Un prodotto viene etichettato stampando 6 linee sottili, 5 linee medie e 3 linee spesse. Se ad ogni sequenza di linee corrisponde una diversa etichetta, quante diverse etichette si possono realizzare con questo schema?

$[168168]$

–

Esercizio 38. (Tema d'esame del 11/12/07-C3)
In quanti modi è possibile eleggere 4 rappresentanti da un gruppo di 21 uomini se due di essi non possono essere eletti insieme?

$[5814]$