
Probabilità e Statistica Esercitazioni

a.a. 2017/2018

C.d.L.: Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni, Ingegneria Informatica

Campionamento

Marco Pietro Longhi

Campionamento

Esercizio 1. Durante un processo di produzione vengono estratti 300 campioni di un pezzo e ne viene misurato lo spessore in mm , fornendo una media campionaria di $2,6 mm$. Si sa inoltre che la varianza della variabile casuale che dá lo spessore é $0,4 mm^2$. Qual é la probabilità che il valore atteso dello spessore sia inferiore a $2,5 mm$?

Risoluzione. Sia X la variabile casuale che denota lo spessore in mm , posto

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu_X}{\sigma_X / \sqrt{n}} \quad \text{con} \quad \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

dal Teorema del limite centrale risulta che $Z \sim N(0; 1)$ per $n \geq 30$.

Essendo $n = 300$ possiamo utilizzare l'approssimazione indicata.

$$\mu_X < 2,5 \implies -\mu_X > -2,5 \implies 2,6 - \mu_X > 2,6 - 2,5$$

$$\text{da cui} \quad \frac{2,6 - 2,5}{\sqrt{0,4/300}} \implies \frac{2,6 - \mu_X}{\sqrt{0,4/300}} > 2,739 \approx 2,74$$

pertanto $\mu_X < 2,5$ se $Z > 2,74$

$$P[\mu_X < 2,5] = P[Z > 2,74] = 1 - \Phi(2,74) = 1 - 0,99693 = 0,00307$$

Esercizio 2. In un processo di produzione vengono prodotte sbarre con una lunghezza data da una distribuzione normale, di cui si conosce la deviazione standard, pari a $0,2 m$. Si esegue un campionamento per calcolare il valore atteso, misurando un numero n di sbarre e calcolando la media. Qual é la numerosità del campione che garantisce una probabilità superiore al 97% che la media campionaria disti dal valore atteso per meno di $1 cm$?

Risoluzione. Sia X la v.c. che denota la lunghezza delle sbarre in m e sia

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

bisogna determinare n tale che

$$P [|\bar{X}_n - \mu_X| < 0,01] > 0,97$$

Essendo

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu_X; \frac{\sigma_X^2}{n}\right) \implies Z \sim N(0; 1) \quad \text{con} \quad Z = \frac{\bar{X}_n - \mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}}$$

da cui

$$|\bar{X}_n - \mu_X| = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} |Z| = \frac{0,2}{\sqrt{n}} |Z|$$

quindi

$$\begin{aligned} P\left[|\bar{X}_n - \mu_X| < 0,01\right] &= P\left[\frac{0,2}{\sqrt{n}} |Z| < 0,01\right] = \\ &= P\left[|Z| < \frac{0,01}{0,2/\sqrt{n}}\right] = P\left[|Z| < 0,05\sqrt{n}\right] \end{aligned}$$

pertanto

$$P\left[|\bar{X}_n - \mu_X| < 0,01\right] > 0,97 \implies P\left[|Z| < 0,05\sqrt{n}\right] > 0,97$$

$$\begin{aligned} P [|Z| < 0,05\sqrt{n}] &= \Phi (0,05\sqrt{n}) - \Phi (-0,05\sqrt{n}) = \\ &= \Phi (0,05\sqrt{n}) - [1 - \Phi (0,05\sqrt{n})] = 2\Phi (0,05\sqrt{n}) - 1 \end{aligned}$$

quindi

$$2\Phi (0,05\sqrt{n}) - 1 > 0,97 \implies \Phi (0,05\sqrt{n}) > 0,985$$

dalle tavole $\Phi (2,17) = 0,985$

da cui

$$0,05\sqrt{n} > 2,17 \implies n > \left(\frac{2,17}{0,05} \right)^2 \approx 1884$$

Esercizio 3. [Tema d'esame del 07/12/2004-E5]

Si supponga che una distribuzione con media incognita abbia deviazione standard uguale a 1. Quanto deve essere grande un campione affinché si abbia una probabilità almeno del 90% che la media campionaria \bar{X}_n disti meno di 0.5 dalla media della popolazione?

Risoluzione. Bisogna determinare n tale che

$$P \left[|\bar{X}_n - \mu_X| < 0,5 \right] \geq 0,90$$

La *legge dei grandi numeri* ci garantisce che pur di prendere un campione sufficientemente numeroso, l'evento secondo cui la media campionaria \bar{X}_n si discosta di "pochissimo" (nel nostro caso meno di 0,5) dal valore atteso può avere probabilità arbitrariamente vicino ad 1. Pertanto esisterà sicuramente un valore opportuno della dimensione n del campione tale che la probabilità di questo evento sia maggiore di 0,90

$$\begin{aligned}
P \left[|\bar{X}_n - \mu_X| < 0,5 \right] &= 1 - P \left[|\bar{X}_n - \mu_X| \geq 0,5 \right] = \\
&= 1 - P \left[|\bar{X}_n - \mu_X|^2 \geq 0,25 \right] \underset{\substack{\geq \\ (Markov)}}{\geq} 1 - \frac{E \left(|\bar{X}_n - \mu_X|^2 \right)}{0,25} = 1 - \frac{\sigma^2/n}{0,25}
\end{aligned}$$

Pertanto, poiché $\sigma = 1$,

$$1 - \frac{\sigma^2/n}{0,25} = 0,90 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sigma^2/n}{0,25} = 0,10 \quad \Longrightarrow \quad n = 40$$

In conclusione la probabilità che la media campionaria differisca dalla media incognita della popolazione meno di 0,5 é almeno del 90% se si prende un campione casuale di ampiezza superiore a 40.