Esercitazioni di Meccanica Razionale

a.a. 2002/2003

Statica e dinamica relativa

Maria Grazia Naso

naso@ing.unibs.it

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Brescia

Nei problemi di meccanica relativa, rispetto ad un osservatore non inerziale, è necessario considerare oltre alle forze assolute anche le forze apparenti: forze di trascinamento e forze di Coriolis.

Forze centrifughe

▶ **Esempio 1.** In un riferimento uniformemente rotante con velocità angolare $\vec{\omega} = \omega\,\vec{\jmath}$ (Figura 1), le forze di trascinamento sono le forze centrifughe.

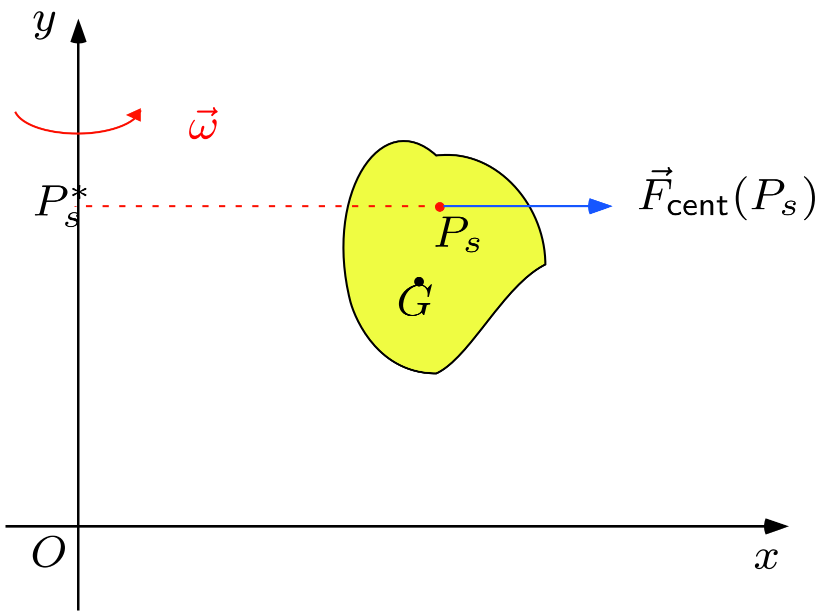

Figura 1:

Consideriamo il sistema materiale discreto costituito da N punti materiali $(P_1, m_1), \ldots, (P_N, m_N)$. Sia y l'asse di rotazione scelto. Calcolate $\vec{F}_{\text{cent}}(P_s) = m_s\,\omega^2(P_s - P_s^*)$, $s = 1, \ldots, N$ e P_s^* è il piede della perpendicolare condotta da P_s all'asse di rotazione, il risultante delle forze centrifughe agenti sul sistema è

$$\boxed{\vec{R}_{\text{cent}}} = \sum_{i=1}^{N} m_s\,\omega^2(P_s - P_s^*) = \sum_{i=1}^{N} m_s\,\omega^2\,x_s\,\vec{\imath} = \boxed{m\,\omega^2\,x_G\,\vec{\imath}}.$$

Le $\vec{F}_{\text{cent}}(P_s) = m_s\,\omega^2(P_s - P_s^*)$, $s = 1, \ldots, N$, applicate rispettivamente in P_s, costituiscono un sistema di vettori applicati paralleli e concordi. Il risultante $\vec{R}_{\text{cent}}$ è applicato in un punto C tale che

$$(C - O) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_s\,\omega^2\,x_s\,(P_s - O)}{R_{\text{cent}}}$$

che in componenti forniscono

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\displaystyle\sum_{s=1}^{N} m_s\, x_s^2}{m\, x_G} = \dfrac{I_\omega}{m\, x_G} = \dfrac{I_{22}}{m\, x_G} \\ y_C = \dfrac{\displaystyle\sum_{s=1}^{N} m_s\, x_s\, y_s}{m\, x_G} = \dfrac{-I_{12}}{m\, x_G}\,. \end{cases}$$

Le forze centrifughe sono conservative. Calcoliamo il potenziale delle forze centrifughe agenti nel sistema materiale considerato:

$$
\begin{aligned}
dL = dU &= \sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \cdot dP_s = \sum_{s=1}^{N} m_s \, \omega^2 \, x_s \, dx_s \\
&= d\left(\frac{1}{2}\,\omega^2 \sum_{s=1}^{N} m_s \; x_s^2\right) = d\left(\frac{1}{2}\, I_\omega \, \omega^2\right) \;,
\end{aligned}
$$

dove in questo esempio $I_\omega = I_{Oy} = I_{22}$, e quindi

$$
\boxed{\mathcal{U} = \frac{1}{2}\, I_\omega \, \omega^2 + c}\,.
$$

▶ **Esempio 2.** Supponiamo che $\vec{\omega} = \omega\, \vec{k}$ (Figura 2). Si trovano $\vec{F}_{\text{cent}}(P_s) = m_s\, \omega^2 (P_s - O)$, $s = 1, \ldots, N$, ed il risultante delle forze centrifughe agenti sul sistema materiale è $\boxed{\vec{R}_{\text{cent}}} = \sum_{i=1}^{N} m_s\, \omega^2 (P_s - O) = \boxed{m\, \omega^2\, (G - O)}$.

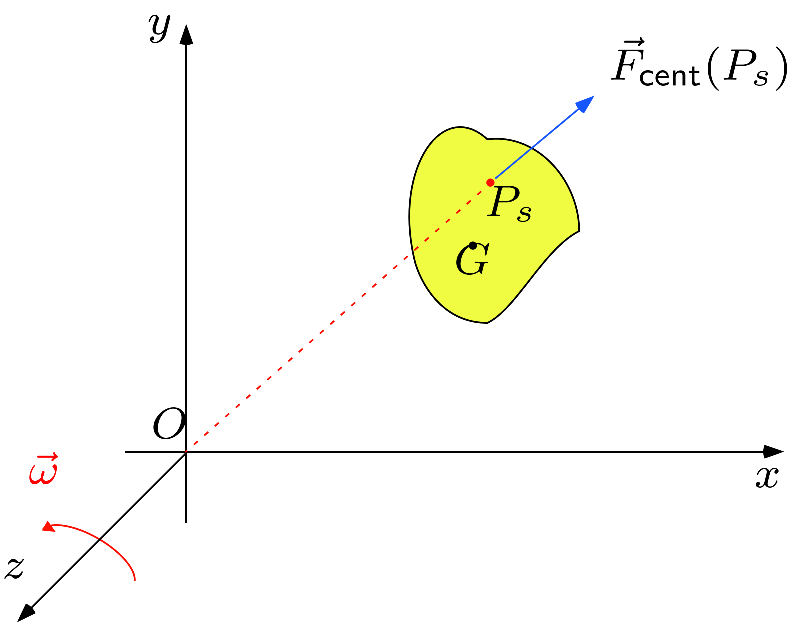

Figura 2:

Le $\vec{F}_{\mathsf{cent}}(P_s) = m_s\,\omega^2(P_s - P_s^*)$, $s = 1, \ldots, N$, applicate rispettivamente in P_s, costituiscono un sistema di forze centrali. Il risultante $\vec{R}_{\mathsf{cent}}$ è applicato in G. In tale caso $I_\omega = I_{Oz} = I_{Gz} + m\,\overline{OG}^2$.

Forze di Coriolis $\longrightarrow$ solo in dinamica relativa.

Si hanno $\vec{F}_{\mathsf{cor}}(P_s) = -2m_s\,\vec{\omega} \times \vec{v}_{rs}$, $s = 1, \ldots, N$, e il risultante delle forze di Coriolis è dato da

$$\vec{R}_{\mathsf{cor}} = -2\,\vec{\omega} \times \sum_{s=1}^{N} m_s\,\vec{v}_{rs} = -2\,\vec{\omega} \times m\,\vec{v}_r(G)\,.$$

Ritornando agli esempi precedenti, si osserva che

- ▷ nell'Esempio 1. : $\vec{R}_{\mathsf{cor}}$ è ortogonale al piano Oxy (uniformemente rotante);
- ▷ nell'Esempio 2. : $\vec{R}_{\mathsf{cor}}$ appartiene al piano Oxy (uniformemente rotante).

Esercizio 1. In un piano verticale Oxy è mobile un'asta omogenea e pesante OA, di massa m e lunghezza L. Determinare il risultante delle forze centrifughe e di Coriolis nei seguenti casi:

(a) Oxy ruota uniformemente con velocità angolare $\vec{\omega}$ costante attorno ad Oy;

(b) Oxy ruota uniformemente con velocità angolare $\vec{\omega}$ costante attorno ad Oz.

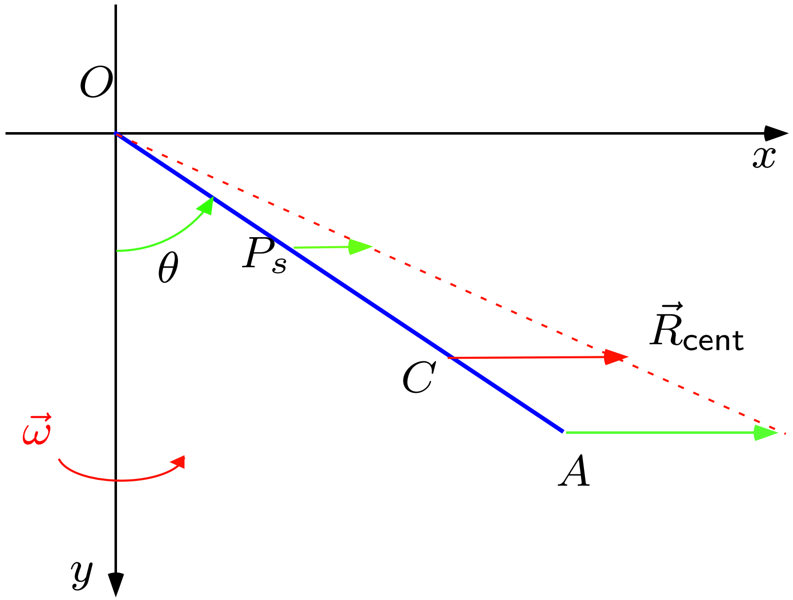

Figura 3:

Risoluzione.

(a) Rispetto ad un osservatore relativo Oxy, l'asta ha un solo grado di libertà. Assumiamo l'angolo $y^+\widehat{O}A = \theta \in [0, 2\pi)$ come coordinata lagrangiana. In Oxy, il baricentro G dell'asta OA ha coordinate

$$G \equiv \left(\frac{L}{2} \, \sin\theta \, , \, \frac{L}{2} \, \cos\theta \right)$$

e la velocità di G nel riferimento Oxy è

$$\vec{v}_{Gr} = \left(\frac{L}{2} \, \cos\theta \, \dot{\theta} \, , \, -\frac{L}{2} \, \sin\theta \, \dot{\theta} \right) \, .$$

Sia $P_s \in$ asta OA. La forza centrifuga in P_s è

$$\vec{F}_{\mathsf{cent}}(P_s) = m_s \, \omega^2 \, x_s \, \vec{\imath}$$

$\longrightarrow$ distribuzione triangolare.

Il risultante delle forze centrifughe è dato da

$$\vec{R}_{\mathsf{cent}} = m \, \omega^2 \, x_G \, \vec{\imath} = m \, \omega^2 \, \frac{L}{2} \, \sin\theta \, \vec{\imath}.$$

Inoltre si trova che $\vec{R}_{\textsf{cent}}$ è applicato in

$$C \equiv \left(\frac{2}{3}\, L\, \sin\theta\,,\ \frac{2}{3}\, L\, \cos\theta \right)\ .$$

Il potenziale delle forze centrifughe è dato da

$$\mathcal{U}_{\textsf{cent}} = \frac{1}{2}\, I_\omega\, \omega^2 = \frac{1}{2}\, \frac{mL^2}{3}\, \sin^2\theta\, \omega^2\ .$$

La forze di Coriolis in P_s è $\vec{F}_{\textsf{cor}}(P_s) = -2m_s\, \vec{\omega} \times \vec{v}_{rs}$, mentre il risultante delle forze di Coriolis è

$$\vec{R}_{\textsf{cor}} = -2\, \vec{\omega} \times m\, \vec{v}_r(G) = -2m \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & -\omega & 0 \\ \dot{x}_G & \dot{y}_G & 0 \end{vmatrix} = -2m\,\omega\,\dot{x}_G\,\vec{k} = -m\,\omega\,L\,\cos\theta\,\dot{\theta}\,\vec{k}\,.$$

(b) Rispetto ad un osservatore relativo Oxy, l'asta ha un solo grado di libertà. Assumiamo l'angolo $y^+\widehat{O}A = \theta \in [0, 2\pi)$ come coordinata lagrangiana.

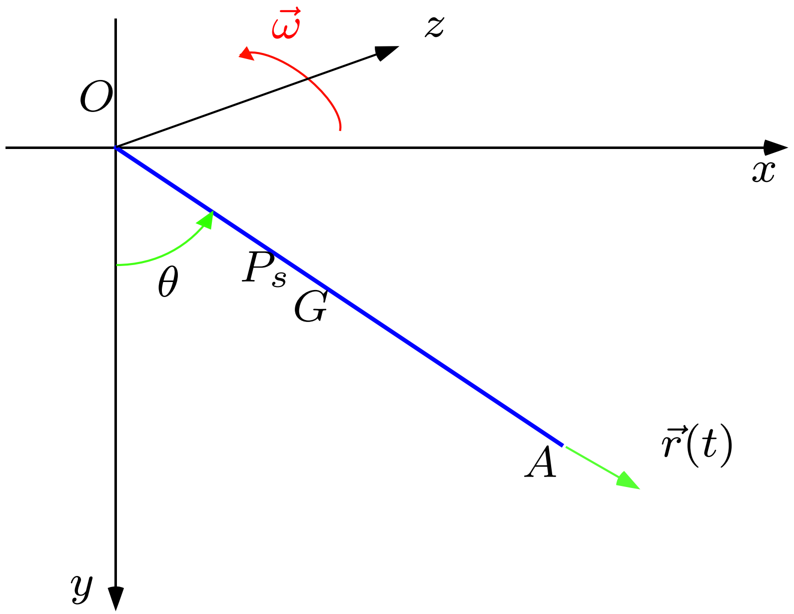

Figura 4:

In Oxy, il baricentro G dell'asta OA ha coordinate

$$G \equiv \left(\frac{L}{2} \,\sin\theta \,,\ \frac{L}{2} \,\cos\theta \right)$$

e la velocità di G nel riferimento Oxy è

$$\vec{v}_{Gr} = \left(\frac{L}{2} \cos\theta \, \dot{\theta} \, , \, -\frac{L}{2} \sin\theta \, \dot{\theta} \right) \, .$$

Sia $P_s \in$ asta OA. La forza centrifuga in P_s è

$$\vec{F}_{\text{cent}}(P_s) = m_s \, \omega^2 \, (P_s - O)$$

Il risultante delle forze centrifughe è dato da

$$\vec{R}_{\text{cent}} = m \, \omega^2 \, (G - O) = m \, \omega^2 \, \frac{L}{2} \, \vec{r}(t)$$

applicato in G.
Il potenziale delle forze centrifughe è dato da

$$\mathcal{U}_{\text{cent}} = \frac{1}{2} \, I_{Oz} \, \omega^2 = \frac{1}{2} \, \frac{mL^2}{3} \, \omega^2 = \text{costante} \, .$$

La forze di Coriolis in P_s è $\vec{F}_{\mathsf{cor}}(P_s) = -2m_s\,\vec{\omega}\times\vec{v}_{rs}$, mentre il risultante delle forze di Coriolis è

$$\vec{R}_{\mathsf{cor}} = -2\,\vec{\omega}\times m\,\vec{v}_r(G) = -2m\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\omega \\ \dot{x}_G & \dot{y}_G & 0 \end{vmatrix} = m\,\omega\,L\;\dot{\theta}\,\vec{r}(t)\,,$$

dove $\vec{r}(t) = \sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$.