# PROBABILITÀ E STATISTICA - 05.12.2006

COGNOME E NOME ..........................................................................................

C. D. L.: AMBL | CIVL | CIVLS | GESL | INFL    ANNO DI CORSO: 1 | 2 | 3 | ALTRO

MATRICOLA ..................................FIRMA .................................. FILA 2

ISTRUZIONI

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni; in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello) e firmare.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato **dopo** ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta. In particolare, per gli esercizi (E1) ed (E2), SCRIVERE **anche** il procedimento applicato per rispondere ai quesiti posti.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, telefoni cellulari.
5. CONSEGNARE **questi fogli e tutti i fogli di protocollo**.
6. TEMPO a disposizione: 150 min.

| Quesito | C1 | C2 | C3 | C4 | QT | E1 | E2 | TOT |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punti | | | | | | | | |

(C1) Una variabile aleatoria $X$ è distribuita normalmente con media 30 e varianza 16. Si chiede di calcolare $P[X > 31.24]$

[PUNTI 4]

C1 (scrivere il risultato con cinque decimali)

(C2) In una ditta di trasporti 7 dipendenti su 15 posseggono la patente $C$ per guidare i camions. Scelti a caso 6 dipendenti, qual è la probabilità che 2 di essi abbiano la patente di tipo $C$?

[PUNTI 4]

C2 (scrivere il risultato in frazione ridotta ai minimi termini)

(C3) Data la funzione

$$f_X(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < a, \\ a & \text{se } a \leq x < 9a, \\ 10a - x & \text{se } 9a \leq x < 10a, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

determinare il valore del parametro $a \in \mathbb{R}^+$ affinché $f_X(x)$ sia una funzione di densità di probabilità.

[PUNTI 4]

C3 (scrivere il risultato in frazione ridotta ai minimi termini)

(C4) Dati gli eventi $A$ e $B$, si sa che

$$P[A] = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad P[\bar{A} \cap \bar{B}] = \frac{3}{5}.$$

Sapendo che $A$ e $B$ sono indipendenti, determinare $P[B]$.

[PUNTI 4]

| C4 (scrivere il risultato in frazione ridotta ai minimi termini) |
|---|
| |

**Quesito Teorico**

Date tre variabili aleatorie $X$, $Y$, $Z$, dimostrare che

$$\operatorname{cov}(3X \pm 2Y, Z) = 3\operatorname{cov}(X, Z) \pm 2\operatorname{cov}(Y, Z).$$

[PUNTI 2]

(E1) Sia $(X, Y)$ la variabile aleatoria bidimensionale avente densità di probabilità

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k\,\dfrac{y}{x} & \text{se } 1 \leq x \leq e \text{ e } 0 \leq y \leq 3, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si chiede:

(a) determinare la costante $k \in \mathbb{R}$ di normalizzazione;

(b) determinare la densità marginale $f_X(x)$ di $X$;

(c) determinare la densità marginale $f_Y(y)$ di $Y$;

(d) dire se le due variabili casuali siano indipendenti, motivando la risposta;

(e) determinare $f_{Y|X}(y|x)$ per $1 \leq x \leq e$;

(f) calcolare $E[Y|X = 2]$;

(g) calcolare $P\left[Y < \dfrac{3}{2}\right]$.

[PUNTI 7]

(E2) Sia $X_1, \dots X_n$ un campione casuale, di dimensione $n$, estratto da una popolazione distribuita con densità di probabilità

$$f_X(x;b) = \begin{cases} \frac{1}{3b} & \text{se } \frac{1}{2} - 2b < x < \frac{1}{2} + b, \text{ con } b > 0, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si chiede:

(a) determinare uno stimatore $T_1$ di $b$ con il metodo dei momenti;

(b) verificare se lo stimatore $T_1$ sia distorto e calcolarne l'errore quadratico medio MSE$[T_1]$;

(c) considerato poi lo stimatore $T_2 = 2\left[\bar{X}_8 - 2X_1 + \frac{1}{2}\right]$, verificare se $T_2$ sia distorto e calcolarne l'errore quadratico medio MSE$[T_2]$;

(d) quale dei due stimatori $T_1$ e $T_2$ di $b$ è preferibile (giustificare la risposta)?

[PUNTI 7]