Probabilità e Statistica - 03.09.2008

Cognome e Nome .....

C. d. L.: AMBL CIVL CIVLS GESL INFL Anno di Corso: 1 2 3 altro

Matricola .....Firma ..... FILA 2

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni; in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello) e firmare.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato **dopo** ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta. In particolare, per gli esercizi (E1) ed (E2), SCRIVERE **anche** il procedimento applicato per rispondere ai quesiti posti.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, telefoni cellulari.
5. CONSEGNARE **questi fogli e tutti i fogli di protocollo**.
6. TEMPO a disposizione: 150 min.

Quesito	C1	C2	C3	C4	QT	E1	E2	TOT
Punti								

(C1) Sia X una variabile casuale distribuita normalmente con media 7.7 e varianza 4. Calcolare $P[\sqrt[3]{X} \geq 2]$.

[punti 4]

C1 (scrivere il risultato con cinque decimali)

(C2) Un'urna contiene 3 palline rosse e 3 palline blu. Si estraggono 2 palline e, dopo averne guardato il colore, si reinseriscono nell'urna. Calcolare la probabilità di estrarre 1 pallina rossa e 1 pallina blu per la prima volta al terzo tentativo.

[punti 4]

C2 (scrivere il risultato in frazione ridotta ai minimi termini)

(C3) Il tempo di vita medio di un macchinario è distribuito esponenzialmente, con media pari a 400 ore. Calcolare la probabilità che il macchinario funzioni per almeno altre 200 ore, sapendo che ha lavorato correttamente per le prime 600 ore.

[punti 4]

C3 (scrivere il risultato con cinque decimali)

(C4) In un tratto di autostrada, vi sono 0.07 crepe per km. Qual è la probabilità che non vi siano crepe in 5 km?

[PUNTI 4]

C4 (scrivere il risultato con cinque decimali)

Quesito Teorico

Date due variabili aleatorie indipendenti X e Y, dimostrare che

$$\mathrm{cov}[X - 3Y, X + 4] = \mathrm{var}[X].$$

[PUNTI 2]

(E1) Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale di ampiezza n, estratto da una popolazione distribuita con la densità di probabilità

$$f_X(x, \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{9\theta^2} x e^{-x/(3\theta)} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

con $\theta > 0$.

(a) Determinare uno stimatore T_1 di θ con il metodo della massima verosimiglianza.

(b) Verificare se lo stimatore T_1 è corretto.

(c) Si consideri lo stimatore $T_2 = \dfrac{3X_1 + \overline{X}_n}{8}$. Indicare quale tra i due stimatori T_1 e T_2 è preferibile. Motivare la risposta.

[PUNTI 7]

(E2) Sia X una variabile casuale avente densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ \frac{5}{12} & \text{se } 1 < x \leq 3, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

(a) Determinare la funzione di ripartizione F_X.

(b) Calcolare $\mathrm{var}[X]$.

(c) Calcolare $\mathrm{P}\left[\frac{1}{2} \leq X \leq 6\right]$.

(d) Sia Y una variabile casuale continua distribuita uniformemente sull'intervallo $[-1, 1]$. Sapendo che X e Y sono indipendenti, calcolare $\mathrm{E}[(X+Y)^2]$.

[PUNTI 7]