

# PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE - 02.07.2024

COGNOME E NOME ..... N. MATRICOLA .....

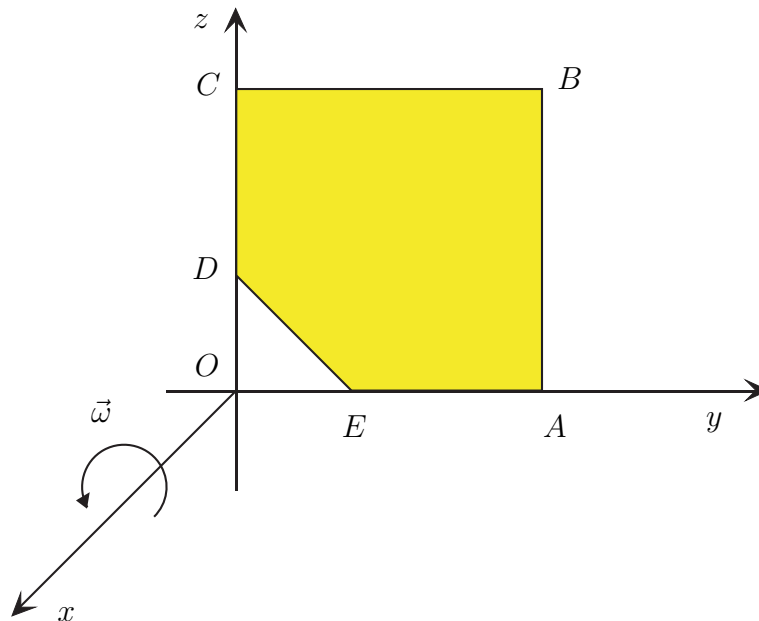
C.D.L.: .....

ANNO DI CORSO:  2  3  ALTRO

ESERCIZIO 1. Nel piano  $Oyz$  si consideri il sistema materiale omogeneo  $ABCDE$  (vedi figura), di massa  $m$ , con  $\overline{OA} = \overline{OC} = 3L$ ,  $\overline{OD} = \overline{OE} = L$ .

Si chiede di determinare:

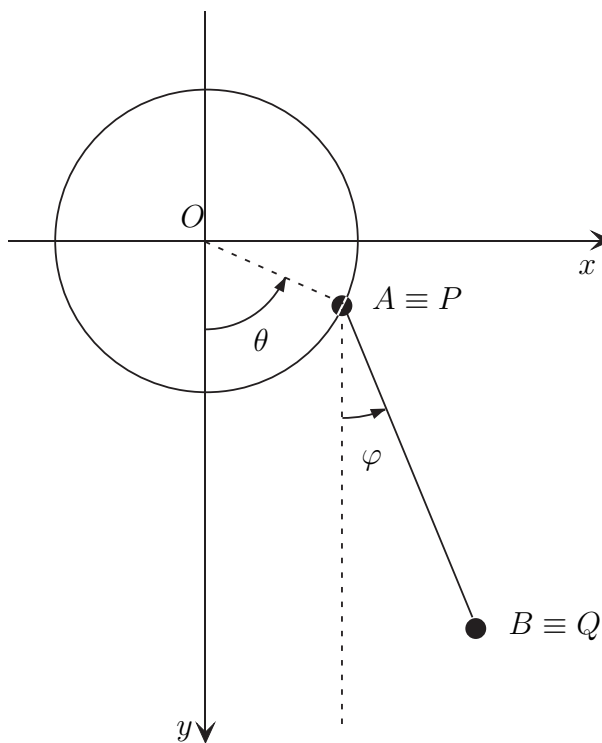
1. le coordinate del baricentro del sistema (punti 2);
2. i momenti d'inerzia  $I_{Oy}$ ,  $I_{Oz}$ ,  $I_{Ox}$  del sistema rispetto al riferimento  $Oxyz$  (punti 6);
3. il momento di deviazione  $I_{yz}$  del sistema rispetto al riferimento  $Oxyz$  (punti 2);
4. il momento d'inerzia  $I_r$  del sistema rispetto alla retta  $r$  di equazione  $z = y$  (punti 2);
5. il momento della quantità di moto assiale  $K_x$  del sistema posto in rotazione uniforme con velocità angolare costante  $\vec{\omega}$  attorno all'asse  $Ox$  (facoltativo) (punti 2).



ESERCIZIO 2. In un piano verticale  $Oxy$ , si consideri un sistema materiale pesante costituito da un'asta omogenea  $AB$ , di massa  $3m$  e lunghezza  $2L$ , e da due punti materiali  $P$ , di massa  $\frac{3}{2}m$ , e  $Q$ , di massa  $\frac{1}{2}m$ , saldati rispettivamente in  $A$  e in  $B$ . L'asta ha l'estremo  $A$  vincolato a scorrere su un profilo circolare fisso di raggio  $L$  e centro  $O$ . Oltre alle forze peso, sull'asta agisce una coppia di momento costante  $\vec{M} = -2mgL\vec{k}$ .

Supposti i vincoli lisci e scelti come parametri lagrangiani l'angolo  $\theta = y^+\hat{O}A$ , con  $\theta \in [0, 2\pi)$  e l'angolo  $\varphi = y^+\hat{A}B$ , dove  $y'$  è la retta parallela all'asse  $Oy$  passante per  $A$ , con  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , si chiede:

1. determinare la funzione potenziale di tutte le forze attive agenti sul sistema (punti 4);
2. determinare le configurazioni di equilibrio del sistema (punti 4);
3. studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio del sistema (punti 4);
4. determinare la reazione vincolare esterna nelle configurazioni di equilibrio (punti 2);
5. scrivere l'espressione dell'energia cinetica del sistema (punti 6).




---

AVVERTENZE:

1. Non è consentita la consultazione di testi e appunti.
2. Durata della prova: 120 minuti.
3. Ammissione alla prova orale con punteggio 16/30.

## SOLUZIONI

### ESERCIZIO 1

1.  $y_G = z_G = \frac{80}{51}L$ ,  $x_G = 0$
2. momenti d'inerzia:  $I_{Oy} = I_{Oz} = \frac{19}{6}mL^2$ ,  $I_{Ox} = \frac{19}{3}mL^2$
3. prodotto d'inerzia:  $I_{yz} = -\frac{485}{204}mL^2$
4. momento d'inerzia  $I_r = \frac{161}{204}mL^2$
5. momento della quantità di moto assiale  $K_x = \frac{19}{3}mL^2\omega$

### ESERCIZIO 2

1. potenziale  $U$  delle forze attive:

$$U = mgL[5\cos\theta + 4\cos\varphi + 2\varphi] + c$$

2. posizioni di equilibrio:

$$(0; \frac{\pi}{6}); (0; \frac{5\pi}{6}); (\pi; \frac{\pi}{6}); (\pi; \frac{5\pi}{6})$$

3. stabile:  $(0; \frac{\pi}{6})$

4. reazione vincolare all'equilibrio:

$$\vec{\phi}_P = -5mg\vec{j}$$

5. energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2}mL^2[5\dot{\theta}^2 + 6\dot{\varphi}^2 + 8\cos(\theta - \varphi)\dot{\theta}\dot{\varphi}]$$