

PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE - 06.02.2025

COGNOME E NOME N. MATRICOLA

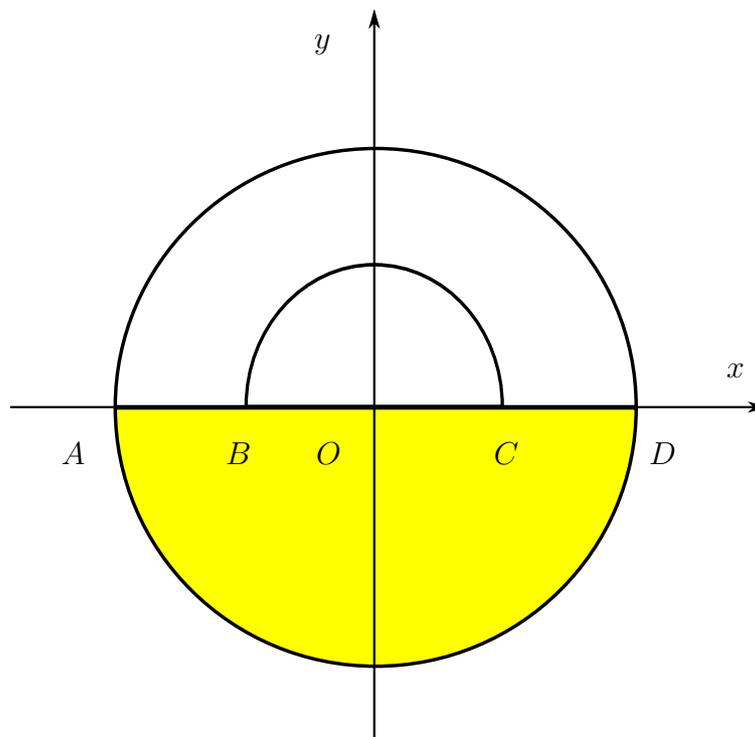
C.D.L.:

ANNO DI CORSO: 2 3 ALTRO

ESERCIZIO 1. Nel piano Oxy si consideri il sistema materiale costituito da una semicorona circolare omogenea \widehat{CDAB} , di massa m e raggi $\overline{OC} = R$, $\overline{OD} = 2R$ e da un semidisco omogeneo di massa m , e raggio $2R$.

Si chiede di determinare:

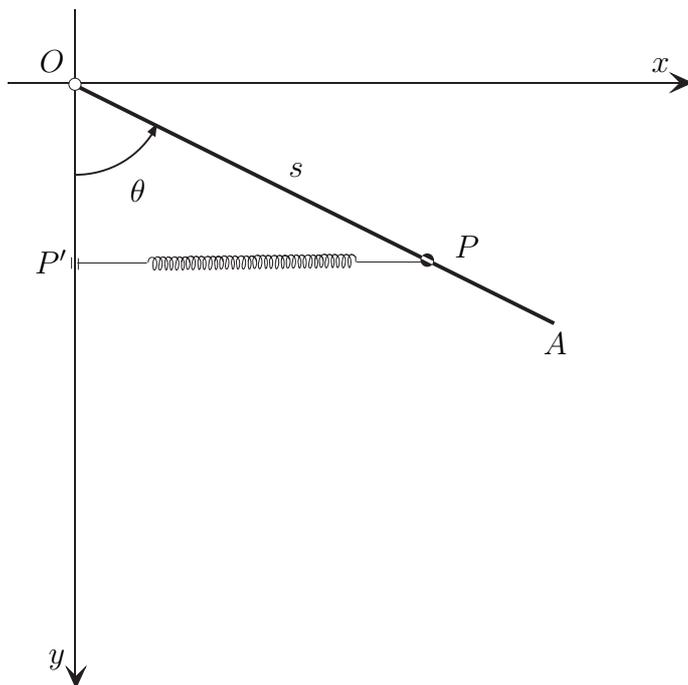
1. l'ordinata del baricentro del sistema (punti 3);
2. i momenti d'inerzia I_{Ox} , I_{Oy} , I_{Oz} del sistema (punti 3);
3. il momento d'inerzia I_{Gz} del sistema (punti 3);
4. il momento d'inerzia I_r del sistema rispetto alla retta r di equazione $y = x$ (punti 3).



ESERCIZIO 2. In un piano verticale Oxy , si consideri un punto materiale P , di massa $\frac{m}{2}$, vincolato a muoversi su un'asta omogenea OA , di massa $4m$ e lunghezza $2L$, avente l'estremo O incernierato nell'origine del sistema di riferimento. Oltre alle forze peso, sul sistema agiscono la forza elastica $\vec{F}_P = -\sqrt{3} \frac{mg}{L} (P - P')$ applicata al punto P , con P' proiezione di P sull'asse Oy e la forza costante $\vec{F}_A = \sqrt{3} mg \vec{i}$, applicata nell'estremo A dell'asta.

Supposti i vincoli lisci e scelti come parametri lagrangiani l'angolo $\theta = y^+ \hat{O}A$, con $\theta \in [0, 2\pi)$ e $s = |P - O|$, con $s \in [0, 2L]$, si chiede di:

1. determinare la funzione potenziale di tutte le forze attive agenti sul sistema (punti 4);
2. verificare che $(L, \frac{\pi}{6})$ è configurazione di equilibrio ordinaria per il sistema (punti 4);
3. stabilire se le configurazioni di confine corrispondenti ad $s = 0$ possono essere di equilibrio per il sistema (punti 4);
4. determinare le reazioni vincolari esterna ed interna nella configurazione di equilibrio al punto 2) (punti 5);
5. scrivere l'espressione dell'energia cinetica del sistema (punti 3).



AVVERTENZE:

1. Non è consentita la consultazione di testi e appunti.
2. Durata della prova: 120 minuti.
3. Ammissione alla prova orale con punteggio 16/30.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

1. $y_G = \frac{2R}{9\pi}$
2. momento d'inerzia: $I_{Ox} = I_{Oy} = \frac{9}{4} mR^2$
3. momento d'inerzia: $I_{Oz} = \frac{9}{2} mR^2$
4. momento d'inerzia: $I_{Gz} = \left(\frac{9}{2} - \frac{8}{81\pi^2}\right) mR^2$
5. momento d'inerzia: $I_r = \frac{9}{4} mR^2$

ESERCIZIO 2

1. potenziale U delle forze attive:

$$U = \frac{mg}{2} s \cos\theta + 4mgL \cos\theta - \frac{\sqrt{3}mg}{2L} s^2 \sin^2\theta + 2\sqrt{3}mgL \sin\theta + c$$

2. $U_s(L; \frac{\pi}{6}) \equiv 0$; $U_\theta(L; \frac{\pi}{6}) \equiv 0$

3. posizione di confine di equilibrio: $(0; -\cos\bar{\theta})$ dove $\bar{\theta} = \arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$

4. reazioni vincolari all'equilibrio:

$$\vec{\phi}_O = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} mg; -\frac{9}{2} mg\right)$$

$$\vec{\phi}_P = mg \vec{h}$$

dove \vec{h} versore perpendicolare ad OA in P ($\vec{h} = (\cos\theta, -\sin\theta)$)

5. energia cinetica:

$$T = \frac{1}{4} m(\dot{s}^2 + s^2\dot{\theta}^2) + \frac{8}{3} mL^2\dot{\theta}^2$$