# Prova scritta di Meccanica Razionale - 06.07.2026

Cognome e Nome ..... N. matricola .....

C.d.L.: ..... Anno di Corso: 2 3 altro

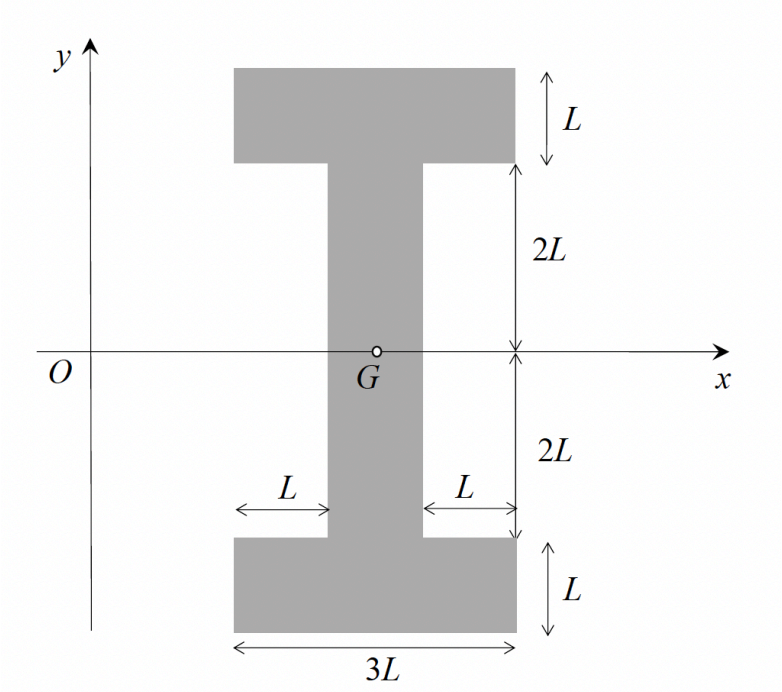
---

Esercizio 1. Nel piano $Oxy$ di un riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, si consideri la lamina omogenea, di massa $m$ e baricentro $G$ di coordinate $(3L, 0)$, le cui dimensioni sono indicate in figura.

Si chiede di determinare:

1. la matrice d'inerzia $\tilde{I}_G$ della lamina rispetto al riferimento $Gx'y'z'$ avente assi paralleli a quelli del riferimento $Oxyz$ (punti 6);
2. la matrice d'inerzia $\tilde{I}_O$ della lamina (punti 6);
3. il momento d'inerzia $I_r$ della lamina rispetto alla retta $r$ di equazione $y = -2L$ (punti 2).

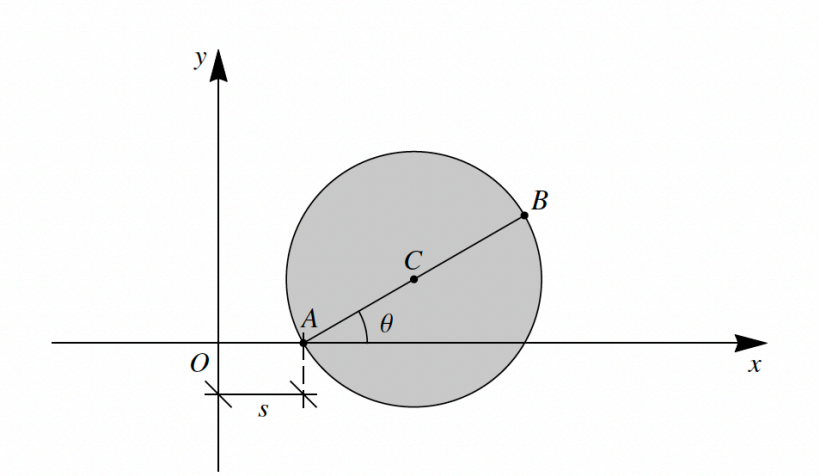
,



Esercizio 2. Nel piano verticale $Oxy$ di un riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, si consideri un disco omogeneo, di massa $m$ e raggio $R$, avente un punto $A$ del suo bordo vincolato a scorrere sull'asse $Ox$. Inoltre il disco può ruotare attorno all'asse $Az$, perpendicolare al piano $Oxy$. Oltre alle forze peso, sul disco agiscono la forza elastica $\vec{F} = -\frac{mg}{2R}(B - O)$, e una coppia di momento $\vec{M} = 2mgR\,cos\theta\,\vec{k}$.

Supposti i vincoli lisci e introdotti i parametri lagrangiani $s \in \mathbb{R}$ e $\theta \in [0, 2\pi)$ (indicati in figura), si chiede di:

1. determinare il potenziale di tutte le forze attive agenti sul disco (punti 4);
2. determinare le configurazioni di equilibrio del disco (punti 4);
3. studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio (punti 3);
4. calcolare la reazione vincolare esterna all'equilibrio (punti 4);
5. scrivere l'energia cinetica del disco (punti 3).




Avvertenze:

1. Non è consentita la consultazione di testi e appunti.
2. Durata della prova: 120 minuti.
3. Ammissione alla prova orale con punteggio 16/30.

## Soluzioni

Esercizio 1

1. momenti d'inerzia: $I_{Gx} = \frac{13}{3}\, mL^2$ ; $I_{Gy} = \frac{29}{60}\, mL^2$ ; $I_{Gz} = \frac{289}{60}\, mL^2$
2. matrice d'inerzia: $I_{Ox} = I_{Gx} = \frac{13}{3}\, mL^2$ ; $I_{Oy} = \frac{569}{60}\, mL^2$; $I_{Oz} = \frac{829}{60}\, mL^2$; $I_{xy} = 0$
3. momento d'inerzia $I_r = \frac{25}{3}\, mL^2$

Esercizio 2

1. potenziale $U$ delle forze attive:

$$U = -mgRsin\theta - \frac{mg}{4R}(s^2 + 4Rs\, cos\theta) + 2mgRsin\theta + c$$

2. quattro posizioni di equilibrio:

$$(\theta = \frac{\pi}{2}, s = 0)\,, (\theta = \frac{3\pi}{2}, s = 0)\,, \quad (\theta = \frac{\pi}{6}, s = -\sqrt{3}R)\,, (\theta = \frac{5\pi}{6}, s = \sqrt{3}R)$$

3. stabili:

$$(\theta = \frac{\pi}{6}, s = -\sqrt{3}R)\,, (\theta = \frac{5\pi}{6}, s = \sqrt{3}R)$$

4. instabili:

$$(\theta = \frac{\pi}{2}, s = 0)\,, (\theta = \frac{3\pi}{2}, s = 0)$$

5. reazione vincolare esterna in $A$:

$$\vec{\Phi}_A(\pi/2) = 2mg\vec{j} \quad \vec{\Phi}_A(3\pi/2) = \vec{0} \quad \vec{\Phi}_A(\pi/6, 5\pi/6) = \frac{3}{2}mg\vec{j}$$

6. energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2}\, m[\dot{s}^2 - 2Rs\, sin\theta\, \dot{s}\dot{\theta} + \frac{3}{2}\, R^2\dot{\theta}^2]$$