

PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE - 08.07.2025

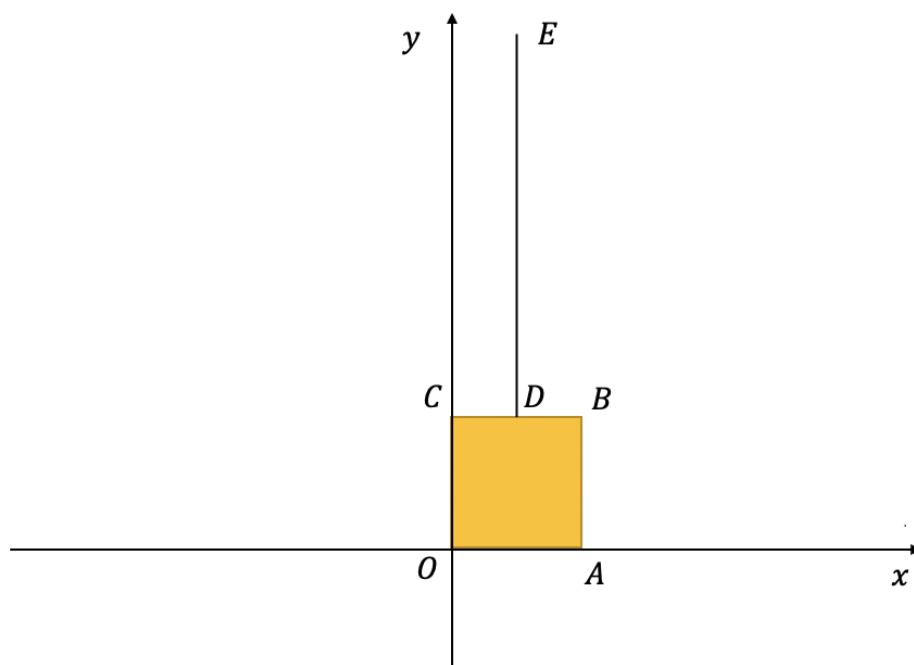
COGNOME E NOME N. MATRICOLA

C.D.L.:

ANNO DI CORSO:

ESERCIZIO 1. Nel piano Oxy si consideri il sistema materiale rigido costituito dall'asta omogenea ED , di massa m_1 e lunghezza $3L$, e dalla lamina quadrata omogenea $OABC$, di massa m_2 e lato L , saldate come in figura. Sapendo che $m_1 + m_2 = m$, si chiede di determinare:

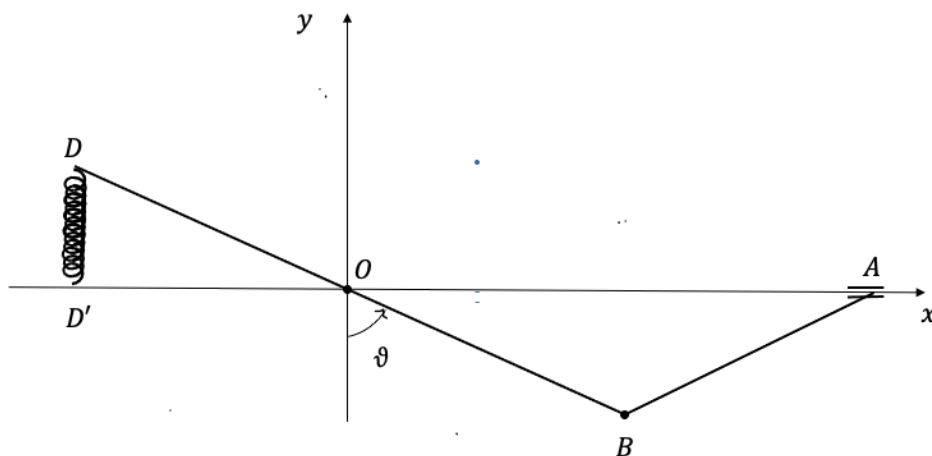
1. i valori di m_1 e m_2 affinché il baricentro G del sistema si trovi ad una distanza pari a $2L$ da E , lungo l'asta (punti 2);
2. la matrice d'inerzia I_O della lamina (punti 4);
3. la matrice d'inerzia I_O dell'asta (punti 4);
4. il momento d'inerzia $I_{Gx'}$ del sistema rispetto alla retta passante per il baricentro del sistema e parallela all'asse Ox (punti 2).



ESERCIZIO 2. In un piano verticale Oxy , si consideri un sistema materiale pesante costituito da un'asta omogenea DB , di massa m e lunghezza $4L$, e da un'asta omogenea AB , di massa m e lunghezza $2L$, incernierate fra loro in B . L'asta DB ha il baricentro incernierato nell'origine del riferimento, l'asta AB ha l'estremo A scorrevole sull'asse Ox . Oltre alle forze peso, sull'asta DB agisce la forza elastica $\vec{F}_D = -\frac{\alpha mg}{L}(D - D')$, ($\alpha > 0$), con D' proiezione ortogonale di D sull'asse Ox .

Introdotta il parametro lagrangiano $\theta = \angle \hat{O}B$, con $\theta \in [0, 2\pi)$, si chiede di:

1. determinare il centro di istantanea rotazione dell'asta AB (punti 1);
2. scrivere le equazioni della base e della rulletta (punti 4);
3. determinare il potenziale di tutte le forze attive agenti sul sistema (punti 2);
4. determinare le configurazioni di equilibrio per il sistema in funzione di α (punti 3);
5. studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio per il sistema in funzione di α (punti 3);
6. scrivere l'espressione dell'energia cinetica del sistema (punti 3);
7. determinare le reazioni vincolari esterne e la reazione vincolare interna in una delle configurazioni di equilibrio stabile, nel caso $\alpha = \frac{1}{2}$ (punti 4).



AVVERTENZE:

1. Non è consentita la consultazione di testi e appunti.
2. Durata della prova: 120 minuti.
3. Ammissione alla prova orale con punteggio 16/30.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

1. $m_1 = \frac{3}{4}m, m_2 = \frac{1}{4}m$
2. matrice d'inerzia $I_O(Q)$: $I_{Ox} = I_{Oy} = \frac{1}{12}mL^2, I_{Oz} = \frac{1}{6}mL^2, I_{xy} = -\frac{1}{16}mL^2$
3. matrice d'inerzia $I_O(ED)$:

$$I_{Ox} = \frac{21}{4}mL^2, I_{Oy} = \frac{3}{16}mL^2, I_{Oz} = \frac{87}{16}mL^2, I_{xy} = -\frac{15}{16}mL^2$$
4. momento d'inerzia: $I_{Gx'} = \frac{4}{3}mL^2$

ESERCIZIO 2

1. Con il teorema di Chasles C è l'intersezione del prolungamento di DB con la perpendicolare per A
2. In Oxy base: $x^2 + y^2 = 16L^2$, in $Ax'y'$ rulletta: $(x' - 2L)^2 + y'^2 = 4L^2$, con Ax' supporto di AB e Ay' ortogonale ad AB
3. potenziale U delle forze attive:

$$U = mgL \cos \theta (1 - 2\alpha \cos \theta) + c$$

4. $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$, indipendenti da α
 $\theta_3 = \bar{\theta}, \theta_4 = 2\pi - \bar{\theta}$ con $\bar{\theta} = \arccos \frac{1}{4\alpha}$, che esistono solo se $\alpha \geq \frac{1}{4}$
5. θ_1 stabile per $\alpha < \frac{1}{4}$, θ_2 sempre instabile, $\theta_{3,4}$ stabili se $\alpha > \frac{1}{4}$, $\alpha = \frac{1}{4}$ punto di biforcazione stabile
6. reazioni vincolari all'equilibrio se $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\vec{\phi}_A = \frac{1}{2}mg\vec{j}$$

$$\vec{\phi}_O = (0; 2mg)$$

$$\vec{\phi}_B = (0; \frac{1}{2}mg)$$

7. energia cinetica:

$$T = 4mL^2\dot{\theta}^2(\frac{1}{3} + \cos^2\theta)$$