

PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE - 09.07.2019

COGNOME E NOME N. MATRICOLA

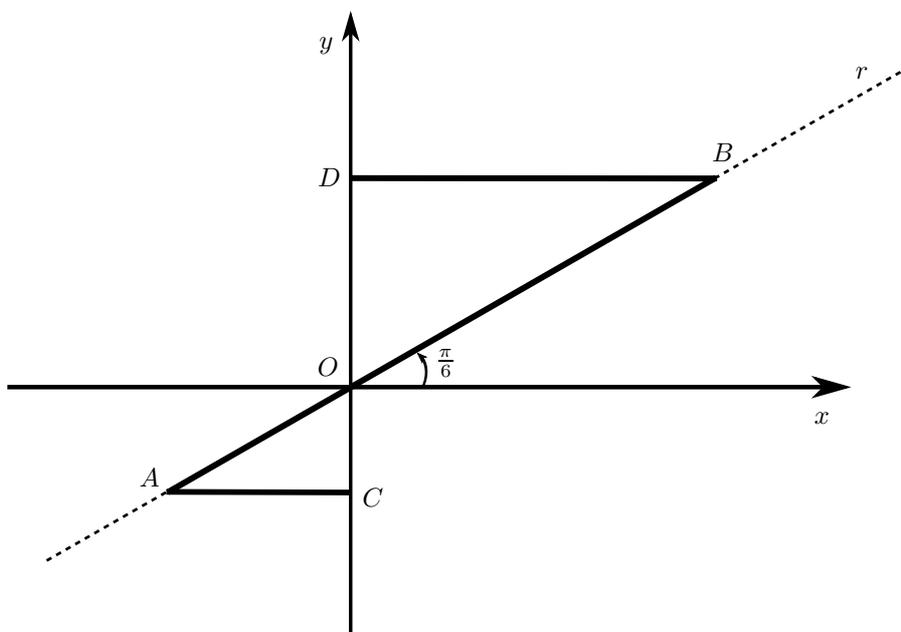
C.D.L.:

ANNO DI CORSO: 2 3 ALTRO

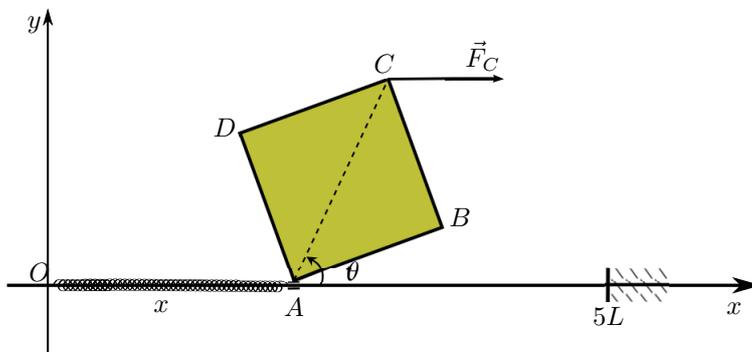
FILA 1

Esercizio 1. Nel piano Oxy si consideri un corpo rigido, costituito da un'asta non omogenea AB , di massa m e lunghezza $3L$, avente densità $\rho(P) = k|P - B|$, ($k > 0$), inclinata di un angolo $\alpha = \pi/6$ rispetto all'asse positivo delle ascisse, da un'asta omogenea BD , di massa $\frac{m}{2}$ e lunghezza $L\sqrt{3}$, e da un'asta omogenea AC , di massa m (vedi figura). Si chiede di determinare:

1. le coordinate del baricentro G del corpo rigido (punti 4);
2. il momento d'inerzia I_r del corpo rigido rispetto alla retta r , di equazione $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ (punti 4);
3. il momento d'inerzia I_{Oz} dell'asta AB rispetto all'asse Oz , ortogonale al piano Oxy (punti 4).



ESERCIZIO 2. In un piano verticale Oxy , si consideri una lamina quadrata $ABCD$ omogenea, di massa m e lato $\sqrt{2}L$, avente l'estremo A scorrevole senza attrito sull'asse Ox . Oltre alla forze peso, sulla lamina agiscono una molla ideale, di costante elastica $k = \frac{mg}{\alpha L}$, ($\alpha > 0$), che collega il vertice A con l'origine del riferimento, ed una forza costante $\vec{F}_C = \frac{mg}{2} \vec{i}$, applicata al vertice C .



Scelti i parametri lagrangiani $x = x_A$, $x \in [0, 5L]$ e $\theta = C\hat{A}x^+$, $\theta \in [0, 2\pi)$, come indicati in figura, si chiede:

1. determinare la funzione potenziale di tutte le forze attive agenti sulla lamina (punti 3);
2. determinare le configurazioni di equilibrio ordinarie della lamina, in funzione di α (punti 2);
3. determinare le configurazioni di equilibrio di confine della lamina, in funzione di α (punti 2);
4. studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio ordinarie (punti 2);
5. scrivere l'energia cinetica della lamina (punti 3);
6. scrivere le equazioni differenziali del moto della lamina (punti 4);
7. calcolare la reazione vincolare dinamica in A nell'istante iniziale, sapendo che per $t = 0$ il vertice A coincide con l'origine del riferimento, C ha coordinate $(2L, 0)$ e l'atto di moto è nullo (punti 4).

AVVERTENZE:

1. Non è consentita la consultazione di testi e appunti.
2. Durata della prova: 150 minuti.
3. Ammissione alla prova orale con punteggio 16/30.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

1. il baricentro G coincide con O
2. momento d'inerzia I_r : $I_r = \frac{3}{16} mL^2$
3. momento d'inerzia dell'asta AB rispetto ad Oz : $I_{Oz} = \frac{1}{2} mL^2$

ESERCIZIO 2

1. potenziale U delle forze attive:

$$U = -mgL\sin\theta - \frac{mg}{2\alpha L} x^2 + \frac{mg}{2}(x + 2L\cos\theta) + c$$

2. posizioni di equilibrio ordinarie:

$$\left(\frac{\alpha L}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) ; \left(\frac{\alpha L}{2}, \frac{7\pi}{4}\right) \text{ se } 0 < \alpha < 10$$

dove la prima è instabile, la seconda stabile

3. posizioni di equilibrio di confine:

$$\left(5L, \frac{3\pi}{4}\right) ; \left(5L, \frac{7\pi}{4}\right) \text{ se } \alpha \geq 10$$

4. energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 - 2L\sin\theta\dot{x}\dot{\theta} + \frac{4}{3} L^2\dot{\theta}^2)$$

5. equazioni differenziali del moto:

$$\ddot{x} - L\sin\theta\ddot{\theta} - L\cos\theta\dot{\theta}^2 + \frac{g}{\alpha L}x - \frac{1}{2}g = 0$$

$$\frac{4}{3}L\ddot{\theta} - \sin\theta\ddot{x} + g\sin\theta + g\cos\theta = 0$$

6. reazione vincolare dinamica esterna in A nell'istante iniziale:

$$\vec{\Phi}_A(t=0) = \frac{mg}{4} \vec{j}$$