

PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE - 10.09.2024

COGNOME E NOME N. MATRICOLA

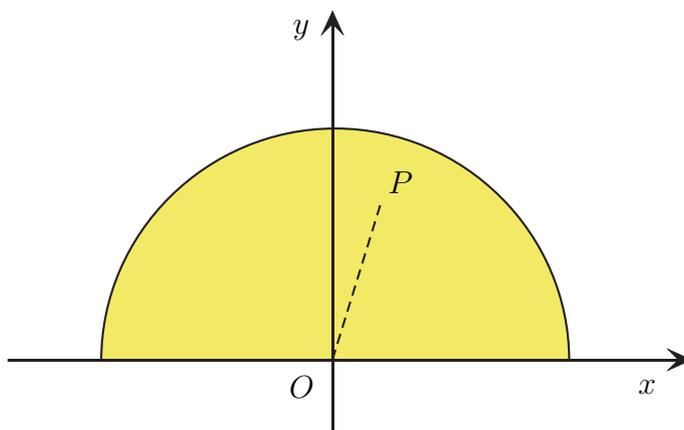
C.D.L.:

ANNO DI CORSO: 2 3 ALTRO

ESERCIZIO 1. Nel piano Oxy si consideri il semidisco non omogeneo, di massa m e raggio R , la cui densità varia con la legge $\rho(P) = k(1 + \alpha \overline{OP})$, con $k, \alpha > 0$.

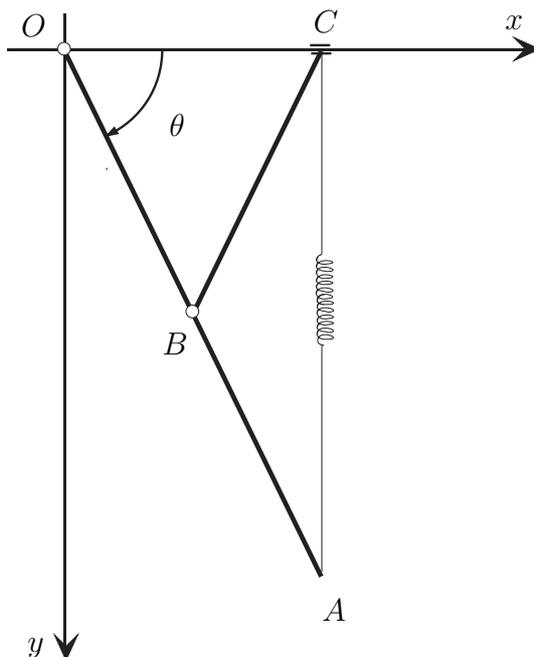
Si chiede di determinare:

1. il valore di α affinché l'ordinata del baricentro del semidisco valga $\frac{13R}{9\pi}$ (punti 5);
2. il momento d'inerzia I_{Oz} del semidisco (con α determinato al punto 1) (punti 5);
3. il momento di deviazione I_{xy} del semidisco (punti 2).



ESERCIZIO 2. In un piano verticale Oxy si consideri un sistema materiale pesante costituito da un'asta omogenea OA , di massa $2m$ e lunghezza $2L$, incernierata nell'origine del riferimento, e da un'asta omogenea BC , di massa m e lunghezza L , avente l'estremo B incernierato nel baricentro di OA e C scorrevole sull'asse Ox . Oltre alle forze peso, sul sistema agisce una molla ideale di costante elastica $k = \frac{5mg}{8\beta L}$ ($\beta > 0$) che collega A con C .

Supposti i vincoli lisci e scelto come parametro lagrangiano l'angolo $\theta = x^+ \widehat{OA}$, con $\theta \in [0, 2\pi)$, si chiede di :



1. determinare la funzione potenziale di tutte le forze attive agenti sul sistema (punti 3);
2. determinare le configurazioni di equilibrio del sistema in funzione di β (punti 4);
3. studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio del sistema in funzione di β (punti 4);
4. determinare le reazioni vincolari esterne all'equilibrio (punti 3);
5. determinare la reazione vincolare interna all'equilibrio (punti 3);
6. scrivere l'espressione dell'energia cinetica del sistema (punti 3).

AVVERTENZE:

1. Non è consentita la consultazione di testi e appunti.
2. Durata della prova: 120 minuti.
3. Ammissione alla prova orale con punteggio 16/30.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

1. $\alpha = \frac{3}{R}$
2. momento d'inerzia: $I_{Oz} = \frac{17}{30} mR^2$
3. momento di deviazione: $I_{xy} = 0$

ESERCIZIO 2

1. potenziale U delle forze attive:

$$U = \frac{5}{4} mgL (2 \sin\theta - \frac{1}{\beta} \sin^2\theta) + c$$

2. posizioni di equilibrio:

$$\text{se } 0 < \beta \leq 1 \quad \theta_1 = \bar{\theta}; \theta_2 = \pi - \bar{\theta}; \text{ dove } \bar{\theta} = \arcsin\beta$$

$$\forall \beta > 0 \quad \theta_3 = \frac{\pi}{2}; \theta_4 = \frac{3\pi}{2}$$

3. stabilità :

$$\theta_1 \text{ e } \theta_2 \text{ stabili se } 0 < \beta < 1$$

$$\theta_3 \text{ stabile se } \beta > 1$$

$$\theta_4 \text{ sempre instabile}$$

$$\beta = 1 \text{ punto di biforcazione stabile}$$

4. reazioni vincolari esterne all'equilibrio:

$$\text{per } \theta = \theta_3, \theta_4 \text{ si ha } \phi_{Ox} = 0, \phi_{Oy} \text{ indeterminata, } \vec{\phi}_C = \phi_C \vec{j} \text{ indeterminata}$$

$$\text{per } \theta = \theta_1, \theta_2 \text{ si ha } \phi_{Ox} = 0, \phi_{Oy} = -\frac{5}{4} mg, \vec{\phi}_C = -\frac{7}{4} mg \vec{j}$$

5. reazione vincolare interna all'equilibrio:

$$\text{per } \theta = \theta_3, \theta_4 \text{ si ha } \phi_{Bx} = 0, \phi_{By} \text{ indeterminata}$$

$$\text{per } \theta = \theta_1, \theta_2 \text{ si ha } \phi_{Bx} = 0, \phi_{By} = -\frac{1}{2} mg$$

6. energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2} (3 + 2 \sin^2 \theta) mL^2 \dot{\theta}^2$$