

PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE - 14.04.2025

COGNOME E NOME N. MATRICOLA

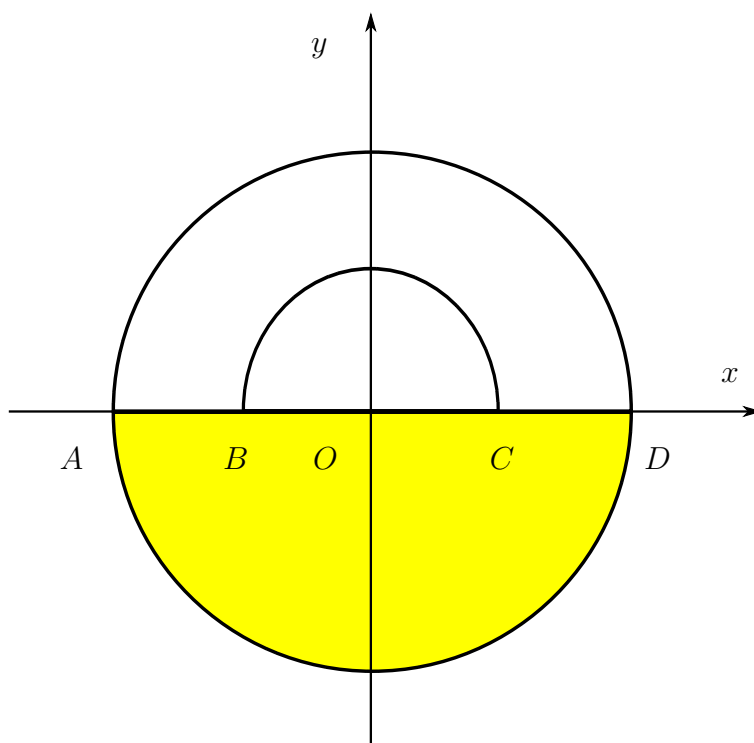
C.D.L.:

ANNO DI CORSO:

ESERCIZIO 1. Nel piano Oxy si consideri il sistema materiale costituito da una semicorona circolare omogenea $\widehat{CDAB}$, di massa $\frac{6}{7}m$ e raggi $\overline{OC} = R$, $\overline{OD} = 2R$ e da un semidisco omogeneo di massa m , e raggio $2R$.

Si chiede di determinare:

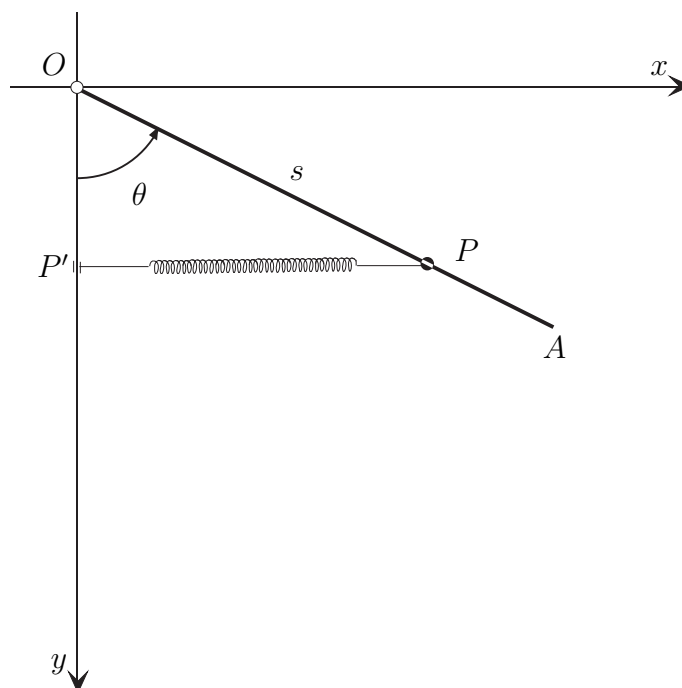
1. l'ordinata del baricentro del sistema (punti 3);
2. la matrice d'inerzia I_O del sistema (punti 3);
3. il momento d'inerzia I_r del sistema rispetto alla retta r di equazione $y = x$ (punti 3);
4. il momento d'inerzia I_t del sistema rispetto alla retta t di equazione $x = 2R$ (punti 3).



ESERCIZIO 2. In un piano verticale Oxy , si consideri un sistema materiale pesante costituito da un punto materiale P , di massa m , vincolato a muoversi su un'asta omogenea OA , di massa $\sqrt{2}m$ e lunghezza L , avente l'estremo O incernierato nell'origine del sistema di riferimento. Oltre alle forze peso, sul sistema agiscono la forza elastica $\vec{F}_P = -k(P - P')$ applicata al punto P , con $k = \frac{4mg}{L}$ e P' proiezione di P sull'asse Oy e la forza costante $\vec{F}_A = \sqrt{2}mg\vec{i}$, applicata all'estremo A dell'asta.

Supposti i vincoli lisci ed introdotti i parametri lagrangiani $\theta = y^+\hat{O}A$, con $\theta \in [0, 2\pi)$ ed $s = |P - O|$, con $s \in [0, L]$, si chiede di:

1. determinare il potenziale di tutte le forze attive agenti sul sistema (punti 4);
2. verificare che $(\theta, s) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}L\right)$ è una configurazione di equilibrio ordinaria per il sistema (punti 4);
3. scrivere l'espressione dell'energia cinetica del sistema (punti 4);
4. scrivere l'espressione del momento della quantità di moto $\vec{K}_O$ del sistema rispetto al polo O (punti 4);
5. determinare le reazioni vincolari esterna ed interna nella posizione di equilibrio indicata al punto 2) (punti 4).



AVVERTENZE:

1. Non è consentita la consultazione di testi e appunti.
2. Durata della prova: 120 minuti.
3. Ammissione alla prova orale con punteggio 16/30.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

1. $y_G \equiv 0$
2. momento d'inerzia: $I_{Ox} = I_{Oy} = \frac{29}{14} mR^2$
3. momento d'inerzia: $I_{Oz} = \frac{29}{7} mR^2$
4. momento d'inerzia: $I_r = \frac{29}{14} mR^2$
5. momento d'inerzia: $I_t = \frac{133}{14} mR^2$

ESERCIZIO 2

1. potenziale U delle forze attive:

$$U = mg s \cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2} mgL \cos\theta - \frac{2mg}{L} s^2 \sin^2\theta + \sqrt{2} mgL \sin\theta + c$$

2. $U_s(\frac{\sqrt{2}}{4}L; \frac{\pi}{4}) \equiv 0$; $U_\theta(\frac{\sqrt{2}}{4}L; \frac{\pi}{4}) \equiv 0$

3. energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{s}^2 + s^2\dot{\theta}^2) + \frac{\sqrt{2}}{6} mL^2\dot{\theta}^2$$

4. momento della quantità di moto:

$$\vec{K}_O = -m(\frac{\sqrt{2}}{3}L^2 + s^2)\dot{\theta} \vec{k}$$

5. reazioni vincolari all'equilibrio:

$$\vec{\phi}_O = ((1 - \sqrt{2})mg; -(1 + \sqrt{2})mg)$$

$$\vec{\phi}_P = \sqrt{2}mg \vec{h}$$

dove $\vec{h}$ versore perpendicolare ad OA in P nel verso di θ crescente.