

PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE - 15.01.2026

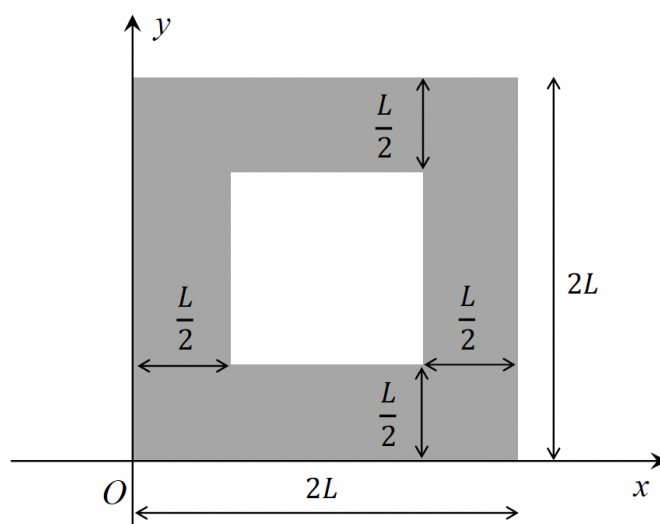
COGNOME E NOME N. MATRICOLA

C.D.L.:

ANNO DI CORSO:

ESERCIZIO 1. Nel piano verticale Oxy , si consideri la lamina omogenea forata, di massa m , lato esterno $2L$ e lato interno L (vedi figura). Si chiede di determinare:

1. la matrice d'inerzia I_O della lamina forata (punti 7);
2. il momento d'inerzia I_r della lamina forata rispetto alla retta r di equazione $y = 2x$ (punti 5).

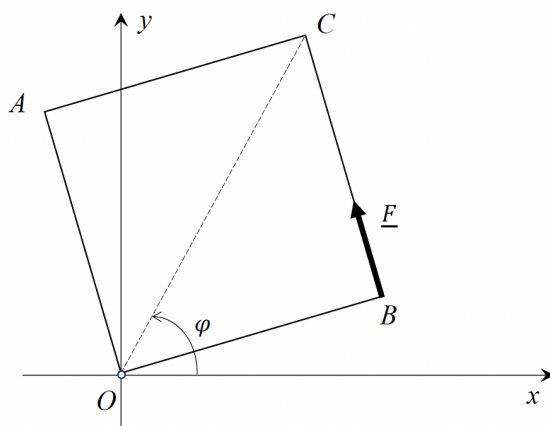


ESERCIZIO 2. In un piano verticale Oxy si consideri il sistema materiale pesante costituito da quattro aste uguali, omogenee, di massa m e lunghezza L , saldate in modo da formare un quadrato (vedi figura). Oltre alle forze peso sul sistema agiscono:

- una forza $\vec{F}_B$, applicata nel vertice B , di modulo costante F , diretta come il vettore $C - B$,
- una forza elastica applicata nel vertice C , $\vec{F}_C = -\frac{\alpha mg}{L} (C - C')$, ($\alpha > 0$), con C' proiezione ortogonale di C sull'asse Oy ,
- una coppia di momento costante $\vec{M} = -FL \vec{i} \times \vec{j}$.

Supposti i vincoli lisci e introdotto come parametro lagrangiano l'angolo $\varphi = \widehat{COx^+}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, si chiede di:

1. determinare il potenziale di tutte le forze attive agenti sul sistema (punti 4);
2. determinare le configurazioni di equilibrio per il sistema in funzione di α (punti 4);
3. studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio in funzione di α (punti 4);
4. analizzare il problema della biforcazione (punti 2);
5. scrivere l'espressione dell'energia cinetica del sistema (punti 4);
6. determinare la reazione vincolare esterna nella configurazione di equilibrio stabile, per $\alpha = 1$ (punti 2).



AVVERTENZE:

1. Non è consentita la consultazione di testi e appunti.
2. Durata della prova: 120 minuti.
3. Ammissione alla prova orale con punteggio 16/30.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

1. momento d'inerzia $I_{Ox} = I_{Oy} = \frac{17}{12} mL^2$
2. momento d'inerzia $I_{Oz} = \frac{17}{6} mL^2$
3. momento di deviazione $I_{xy} = -mL^2$
4. momento d'inerzia $I_r = \frac{37}{60} mL^2$

ESERCIZIO 2

1. potenziale U delle forze attive:

$$U = -2\sqrt{2}mgL\sin\varphi - \alpha mgL\cos^2\varphi + c$$

2. $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$; $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$; $\varphi_3 = \bar{\varphi}$; $\varphi_4 = \pi - \bar{\varphi}$

con $\bar{\varphi} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{\alpha}$ e dove φ_3, φ_4 esistono solo se $\alpha \geq \sqrt{2}$

3. φ_1 stabile se $\alpha > \sqrt{2}$, φ_2 stabile $\forall \alpha > 0$, φ_3, φ_4 dove esistono sono instabili
4. $\alpha = \sqrt{2}$ punto di biforcazione instabile
5. energia cinetica:

$$T = \frac{5}{3} mL^2 \dot{\varphi}^2$$

6. reazione vincolare esterna nella posizione di equilibrio stabile per $\alpha = 1$, φ_2 :

$$\vec{\Phi}_O = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} F; 4mg + \frac{\sqrt{2}}{2} F\right)$$