

# PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE - 16.01.2025

COGNOME E NOME ..... N. MATRICOLA .....

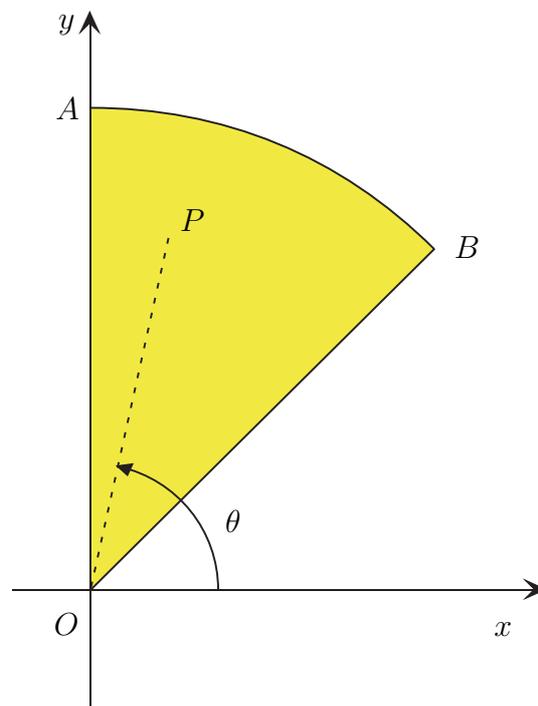
C.D.L.: .....

ANNO DI CORSO:  2  3  ALTRO

ESERCIZIO 1. Nel piano  $Oxy$  si consideri il settore circolare non omogeneo, di apertura  $\frac{\pi}{4}$ , massa  $m$  e raggio  $R$ , la cui densità di massa varia con la legge  $\rho(P) = k \sin \theta$ , con  $k > 0$  e  $\theta = x^+ \widehat{OP}$ .

Si chiede di determinare:

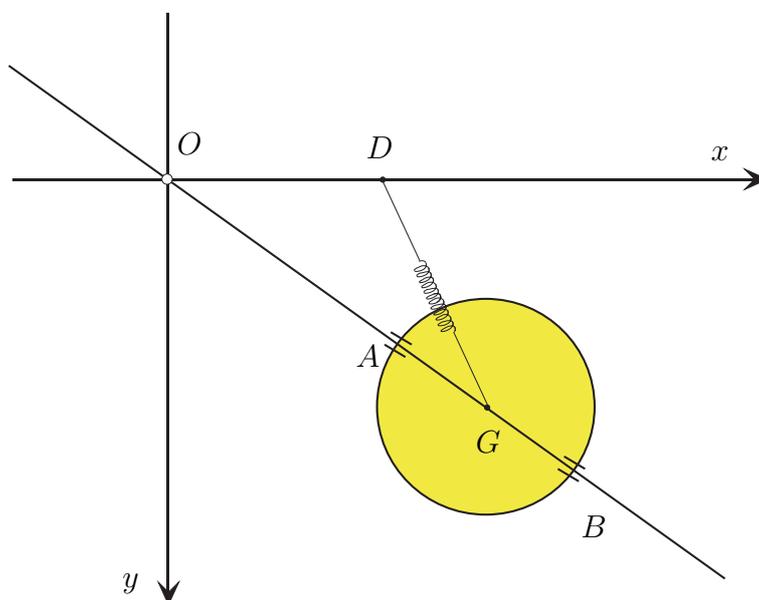
1. le coordinate del baricentro del settore circolare (punti 6);
2. il momento d'inerzia  $I_{Oz}$  del settore circolare (punti 4);
3. il momento d'inerzia  $I_{Gz}$  del settore circolare (punti 2).



ESERCIZIO 2. In un piano verticale  $Oxy$  si consideri un disco omogeneo, di massa  $m$  e raggio  $R$ , vincolato con il diametro  $AB$  a scorrere su una guida rettilinea mobile attorno ad un suo punto fisso  $O$ . Oltre alla forza peso, sul disco agisce una molla ideale di costante elastica  $k = \frac{mg}{2\sqrt{3}R}$ , che collega il centro del disco con il punto  $D$  di coordinate  $(2R, 0)$ .

Supposti i vincoli lisci e scelti come parametri lagrangiani l'angolo  $\theta = x^+ \widehat{OA}$ , con  $\theta \in [0, 2\pi)$ , e la distanza  $s = |G - O|$ , con  $s \in \mathbb{R}$ , si chiede di:

1. determinare la funzione potenziale di tutte le forze attive agenti sul disco (punti 4);
2. determinare le configurazioni di equilibrio del disco (punti 4);
3. studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio del disco (punti 4);
4. determinare le reazioni vincolari esterne all'equilibrio (punti 4);
5. scrivere l'espressione dell'energia cinetica del disco (punti 4).




---

AVVERTENZE:

1. Non è consentita la consultazione di testi e appunti.
2. Durata della prova: 120 minuti.
3. Ammissione alla prova orale con punteggio 16/30.

## SOLUZIONI

### ESERCIZIO 1

1.  $G = \left( \frac{\sqrt{2}R}{6}; \frac{(\pi+2)\sqrt{2}R}{12} \right)$
2. momento d'inerzia:  $I_{Oz} = \frac{1}{2} mR^2$
3. momento d'inerzia:  $I_{Gz} = \frac{1}{18} mR^2 \left[ 8 - \frac{(\pi+2)^2}{4} \right]$

### ESERCIZIO 2

1. potenziale  $U$  delle forze attive:

$$U = mgs \sin\theta - \frac{mg}{4\sqrt{3}R} (s^2 - 4Rs \cos\theta) + c$$

2. posizioni di equilibrio:

$$\left( 0; \frac{5\pi}{6} \right); \left( 0; \frac{11\pi}{6} \right); \left( 4R; \frac{\pi}{3} \right); \left( -4R; \frac{4\pi}{3} \right)$$

3. stabili:  $\left( 4R; \frac{\pi}{3} \right); \left( -4R; \frac{4\pi}{3} \right)$

4. reazioni vincolari all'equilibrio:

$$\vec{\phi}_A = \vec{\phi}_B \quad \text{dove } \vec{\phi}_A = \phi_{Aeq} \vec{h}$$

con  $\vec{h}$  perpendicolare alla retta passante per  $O$

$$\phi_A\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{mg}{\sqrt{3}}; \phi_A\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{mg}{\sqrt{3}}; \phi_A\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0; \phi_A\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

5. energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{s}^2 + s^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{4} mR^2 \dot{\theta}^2$$