

PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE - 17.06.2025

COGNOME E NOME N. MATRICOLA

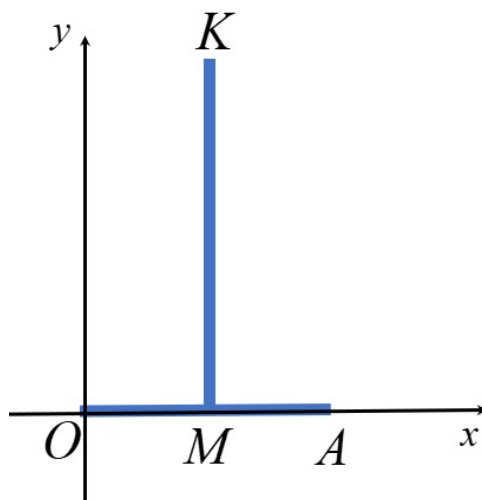
C.D.L.:

ANNO DI CORSO:

ESERCIZIO 1. Nel piano Oxy si consideri il sistema materiale rigido costituito dall'asta omogenea OA , di massa m e lunghezza $2L$ e dall'asta KM , di massa m e lunghezza $4L$, non omogenea, la cui densità varia con la legge $\rho(P) = k\overline{MP}$ ($k > 0$), saldata a T nel punto medio M di OA come in figura.

Si chiede di determinare:

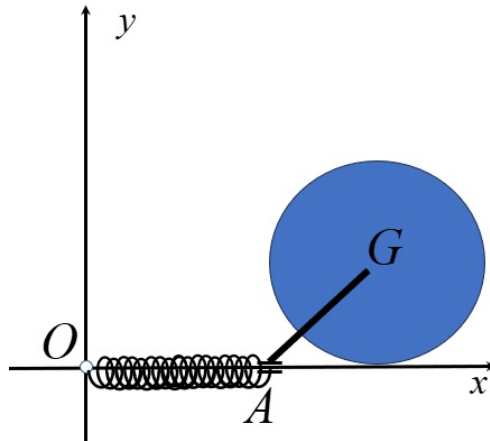
1. le coordinate del baricentro del sistema (punti 3);
2. la matrice d'inerzia I_O del sistema (punti 8);
3. il momento d'inerzia I_r del sistema rispetto alla retta r di equazione $y = x$ (punti 3).



ESERCIZIO 2. In un piano verticale Oxy , si consideri un sistema materiale pesante costituito da un disco omogeneo, di massa m e raggio R , vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse Ox , e da un'asta omogenea AG , di massa m e lunghezza $\sqrt{2}R$, avente l'estremo A scorrevole sull'asse Ox e l'estremo G incernierato nel centro del disco. Oltre alle forze peso, sull'asta agisce la forza elastica $\vec{F}_A = -k(A - O)$, ($k > 0$) e sul disco agisce una coppia di momento $\vec{M} = \alpha k(G - O) \times (G - C)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, con C punto di contatto tra disco e asse Ox .

Introdotta il parametro lagrangiano $x_A = x$, con $x \in \mathbb{R}$, si chiede di:

1. determinare il potenziale di tutte le forze attive agenti sul sistema (punti 3);
2. determinare le configurazioni di equilibrio per il sistema e studiarne la stabilità in funzione di α (punti 5);
3. scrivere l'espressione dell'energia cinetica del sistema (punti 3);
4. determinare le reazioni vincolari esterne e la reazione vincolare interna nelle configurazioni di equilibrio stabile, nel caso $\alpha = 1$ (punti 5);
5. scrivere l'espressione dell'energia meccanica del sistema, nel caso $\alpha = 1$ (punti 2).



AVVERTENZE:

1. Non è consentita la consultazione di testi e appunti.
2. Durata della prova: 120 minuti.
3. Ammissione alla prova orale con punteggio 16/30.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

1. $y_G = (L, \frac{4}{3}L)$
2. momento d'inerzia $I_{Ox} = 8mL^2$
3. momento d'inerzia $I_{Oy} = \frac{7}{3}mL^2$
4. momento d'inerzia $I_{Oz} = \frac{31}{3}mL^2$
5. momento di deviazione $I_{xy} = -\frac{8}{3}mL^2$
6. momento d'inerzia $I_r = \frac{5}{2}mL^2$

ESERCIZIO 2

1. potenziale U delle forze attive:

$$U = -\frac{1}{2}k(\alpha + 1)x^2 - \alpha kRx + c$$

2. $x_e = -\frac{\alpha R}{\alpha + 1}$, con $\alpha \neq -1$, stabile se $\alpha > -1$
3. energia cinetica:

$$T = \frac{5}{4}m\dot{x}^2$$

4. reazioni vincolari all'equilibrio:

$$\vec{\phi}_A = \frac{1}{2}(mg + kR)\vec{j}$$

$$\vec{\phi}_H = (-\frac{1}{2}kR; \frac{1}{2}(3mg - kR))$$

$$\vec{\phi}_G = (\frac{1}{2}kR; \frac{1}{2}(-mg + kR))$$

5. energia meccanica:

$$\frac{5}{4}m\dot{x}^2 + kx^2 + kRx = E$$