

PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE - 18.06.2024

COGNOME E NOME N. MATRICOLA

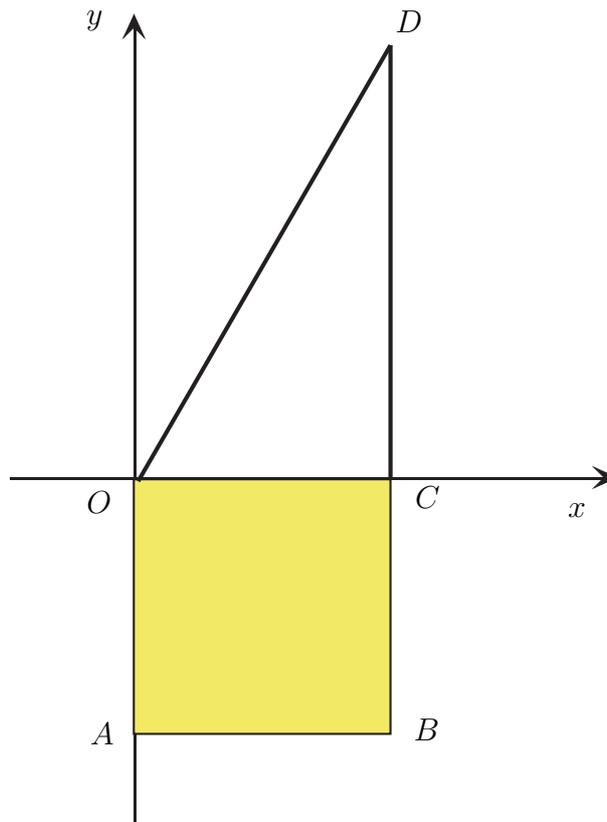
C.D.L.:

ANNO DI CORSO: 2 3 ALTRO

ESERCIZIO 1. Nel piano Oxy si consideri il sistema materiale (vedi figura), costituito da una lamina quadrata omogenea, di massa m e lato $\overline{AB} = L$, da un'asta omogenea OD , di massa m e lunghezza $2L$, e da un'asta non omogenea CD , di massa m , la cui densità varia con la legge $\rho(P) = k\overline{CP}$, $k > 0$.

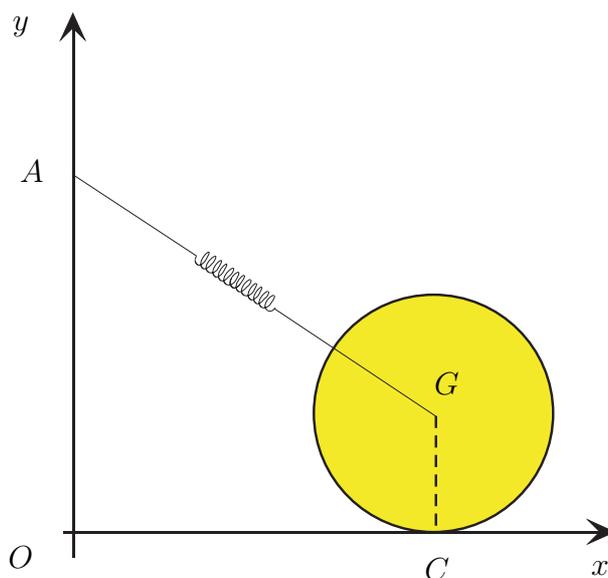
Si chiede di determinare:

1. le coordinate del baricentro del sistema (punti 3);
2. i momenti d'inerzia I_{Ox} , I_{Oy} , I_{Oz} del sistema rispetto al riferimento $Oxyz$ (punti 6);
3. il momento di deviazione I_{xy} del sistema rispetto al riferimento $Oxyz$ (punti 3);
4. il momento d'inerzia I_s del sistema rispetto alla retta di equazione $x = L$ (punti 2).



ESERCIZIO 2. In un piano verticale Oxy si consideri un disco omogeneo e pesante, di massa m e raggio R , che rotola senza strisciare sull'asse Ox . Oltre alla forza peso, sul disco agiscono una molla ideale, di costante elastica $k = \frac{2mg}{R}$, che collega il baricentro G del disco con il punto geometrico A di coordinate $(0, 3R)$, e una forza $\vec{F}_B = \frac{\pi}{3} mg \vec{i}$, applicata al punto B del bordo del disco che ad ogni istante si trova sulla verticale passante per G e C .

Scelto come parametro lagrangiano l'ascissa x del baricentro G e sapendo che per $t = 0$ G appartiene all'asse Oy , si chiede di:



1. determinare la funzione potenziale di tutte le forze attive agenti sul disco (punti 3);
2. determinare le configurazioni di equilibrio del disco (punti 1);
3. studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio del disco (punti 1);
4. scrivere l'espressione dell'energia cinetica del disco (punti 2);
5. scrivere l'equazione differenziale del moto del disco (punti 2);
6. determinare le pulsazioni principali delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile (punti 4);
7. disegnare il diagramma di fase (punti 2);
8. calcolare la reazione vincolare dinamica esterna nell'istante $t = 0$, sapendo che per $t = 0$ l'atto di moto è nullo e G appartiene ad Oy (punti 3).

AVVERTENZE:

1. Non è consentita la consultazione di testi e appunti.
2. Durata della prova: 120 minuti.
3. Ammissione alla prova orale con punteggio 16/30.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

1. $G = \left(\frac{2}{3}L; \frac{(7\sqrt{3}-3)}{18}L\right)$
2. momento d'inerzia: $I_{Ox} = \frac{17}{6}mL^2$
3. momento d'inerzia: $I_{Oy} = \frac{5}{3}mL^2$
4. momento d'inerzia: $I_{Oz} = \frac{9}{2}mL^2$
5. momento di deviazione: $I_{xy} = \frac{(1-4\sqrt{3})}{4}mL^2$
6. momento d'inerzia: $I_s = \frac{2}{3}mL^2$

ESERCIZIO 2

1. potenziale U delle forze attive:

$$U = -\frac{mg}{R}x^2 + \frac{2\pi}{3}mgx + c$$

2. unica posizione di equilibrio:

$$x_e = \frac{\pi}{3}R$$

3. la posizione di equilibrio è stabile

4. energia cinetica:

$$T = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$$

5. equazione differenziale del moto:

$$\ddot{x} + \frac{4g}{3R}x = \frac{4g\pi}{9}$$

6. pulsazione principale: $\omega^2 = \frac{4g}{3R}$

7. $x_e = \frac{\pi}{3}R$ centro

8. reazione vincolare dinamica in C per $t = 0$:

$$\vec{\phi}_C(0) = \left(\frac{mg\pi}{9}; -3mg\right)$$