Prova scritta di Meccanica Razionale - 30.03.2026

Cognome e Nome ..... N. matricola .....

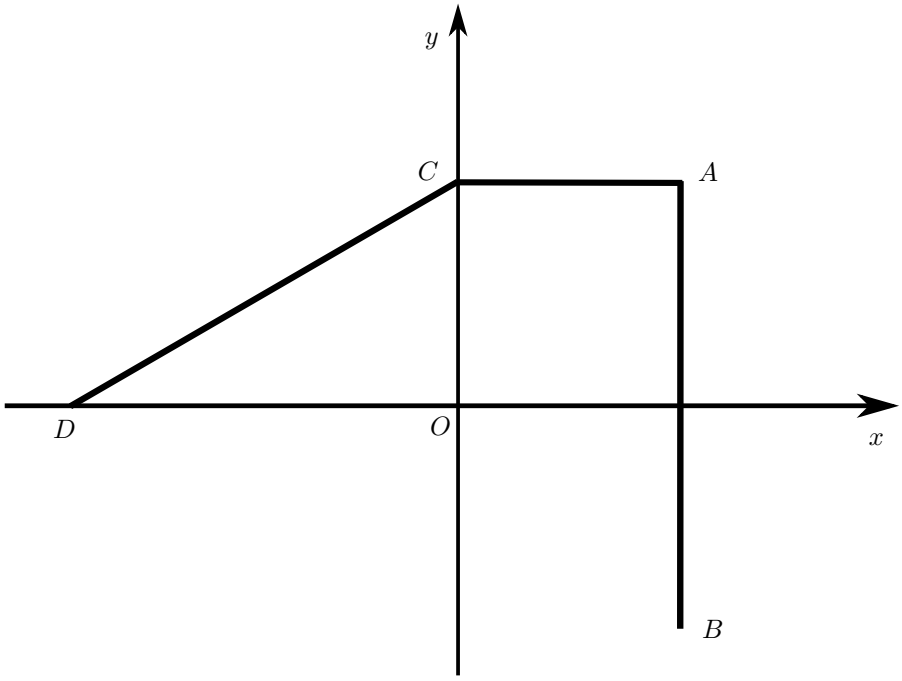
C.d.L.: ..... Anno di Corso: 2 3 altro

Esercizio 1. Nel piano Oxy si consideri un corpo rigido, costituito da tre aste omogenee: AB, di massa m e lunghezza $2L$, AC, di massa m e lunghezza L, e CD, di massa m e lunghezza $2L$ (vedi figura).

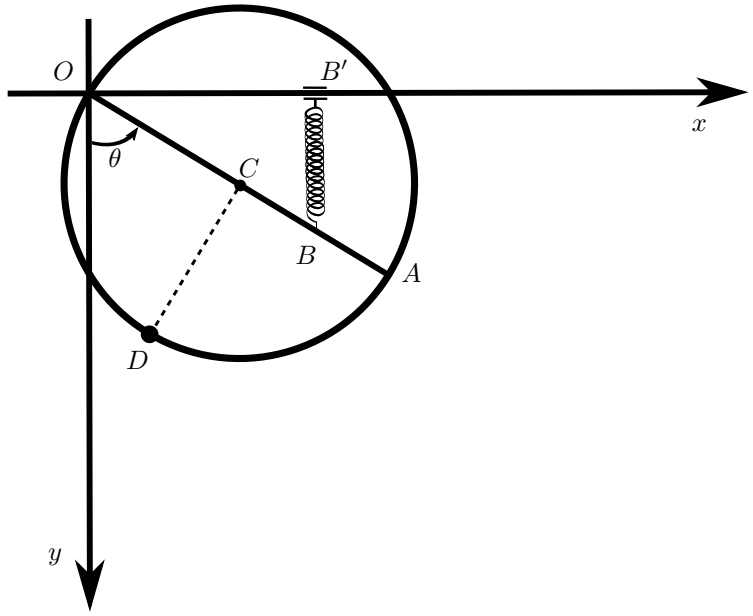
Si chiede di determinare:

1. le coordinate del baricentro G del corpo rigido (punti 2);
2. i momenti d'inerzia I_{Ox}, I_{Oy}, I_{Oz} del corpo rigido rispetto al riferimento $Oxyz$, con Oz ortogonale al piano Oxy (punti 4);
3. i prodotti d'inerzia I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} del corpo rigido (punti 4);
4. il momento d'inerzia I_r del corpo rigido rispetto alla retta r di equazione $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ (punti 4).

,



Esercizio 2. In un piano verticale Oxy, si consideri un sistema materiale rigido pesante costituito da: un anello omogeneo $\mathcal{C}$, di centro C massa m e raggio R, incernierato nell'origine O del riferimento, un'asta omogenea, di massa m e lunghezza $2R$, saldata al diametro OA di $\mathcal{C}$, e un punto materiale P, di massa m, saldato a $\mathcal{C}$ nel punto D tale che il raggio CD sia perpendicolare ad OA. Oltre alle forze peso, sull'asta OA agisce la forza elastica $\vec{F}_B = -k(B-B')$, con $k = \dfrac{8\,mg}{3R}$, B punto medio del raggio CA e B' proiezione ortogonale di B sull'asse Ox, mentre sull'anello $\mathcal{C}$ agisce una coppia di momento $\vec{M} = mg\,\vec{\imath}\times(C-O)$, con $\vec{\imath}$ versore dell'asse Ox.



Supposto il vincolo liscio e scelto il parametro lagrangiano $\theta = A\hat{O}y^+$, $\theta \in [0, 2\pi)$, come indicato in figura, si chiede:

1. determinare la funzione potenziale di tutte le forze attive agenti sul sistema (punti 6);
2. determinare le configurazioni di equilibrio del sistema (punti 2);
3. studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio del sistema (punti 3);
4. determinare l'energia cinetica del sistema (punti 4);
5. disegnare il diagramma di fase del sistema (punti 3).

Avvertenze:

1. Non è consentita la consultazione di testi e appunti.
2. Durata della prova: 120 minuti.
3. Ammissione alla prova orale con punteggio 16/30.

Soluzioni

Esercizio 1

1. coordinate del baricentro: $G(\frac{(3-\sqrt{3})}{6}\,L; \frac{1}{2}\,L)$
2. momento d'inerzia: $I_{Ox} = \frac{5}{3}\,mL^2$
3. momento d'inerzia: $I_{Oy} = \frac{7}{3}\,mL^2$
4. momento d'inerzia: $I_{Oz} = 4\,mL^2$
5. prodotti d'inerzia: $I_{xy} = \frac{(\sqrt{3}-3)}{6}\,mL^2$, $I_{xz} = I_{yz} = 0$
6. momento d'inerzia $I_r = \frac{(25-3\sqrt{3})}{12}\,mL^2$

Esercizio 2

1. potenziale U delle forze attive:

$$U = 3mgRcos\theta - 3mgRcos^2\theta + c$$

2. quattro posizioni di equilibrio:

$$\theta_1 = 0\,, \theta_2 = \pi\,, \quad \theta_3 = \frac{\pi}{3}\,, \theta_4 = \frac{5\pi}{3}$$

3. stabili:

$$\theta_3\,, \theta_4$$

4. instabili:

$$\theta_1\,, \theta_2$$

5. energia cinetica:

$$T = \frac{8}{3}\,mR^2\dot{\theta}^2$$

6. diagramma di fase: $\theta_{3,4}$ centri; $\theta_{1,2}$ selle