
Probabilità e Statistica Esercitazioni

a.a. 2017/2018

C.d.L.: Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni, Ingegneria Informatica

Variabili casuali I

Marco Pietro Longhi

Esercizi

Esercizio 1. Dire se le seguenti funzioni sono funzioni di ripartizione di una variabile casuale reale:

$$1. F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{50}x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 5 \\ -\frac{1}{50}x^2 + \frac{2}{5}x - 1 & \text{se } 5 < x \leq 10 \\ 1 & \text{se } x > 10 \end{cases}$$

$$2. F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 2x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ -x + 3 & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

$$3. F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

[si; no; si]

Esercizio 2. Si consideri un'urna contenente 6 palline verdi e 4 blu. Sia X la variabile casuale discreta che denota il numero di palline verdi estratte in un'estrazione in blocco di 3 palline. Determinare

1. la funzione densità di probabilità e tracciarne il grafico;
2. la funzione di ripartizione F_X e tracciarne il grafico;
3. la probabilità che al più 1 pallina sia verde;
4. $P[0 < X \leq 2]$, $P[1 \leq X \leq 3]$;
5. $E[X]$, $\text{var}[X]$ e σ_X .

$$\left[\begin{array}{l} f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & x = 0 \\ \frac{3}{10} & x = 1 \\ \frac{1}{2} & x = 2 \\ \frac{1}{6} & x = 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{30} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{5}{6} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases} \\ P[X \leq 1] = \frac{1}{3} \\ P[0 < X \leq 2] = \frac{4}{5} \\ P[1 \leq X \leq 3] = \frac{29}{30} \\ E[X] = \frac{9}{5} \\ \text{var}[X] = \frac{14}{25} \\ \sigma_X = 0,748 \end{array} \right]$$

Esercizio 3. Si consideri la variabile casuale continua X che rappresenta la durata di un pezzo in anni, con densità di probabilità data da

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{78} (x^2 + 1) & \text{se } 0 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare $P[X \leq 4]$, $P[2 < X \leq 5]$, $P[2 \leq X \leq 5]$ e $P[X > 2]$.

$$\left[\begin{array}{l} P[X \leq 4] = \frac{38}{117} \\ P[2 < X \leq 5] = \frac{7}{13} \\ P[2 \leq X \leq 5] = \frac{7}{13} \\ P[X > 2] = \frac{110}{117} \end{array} \right]$$

Esercizio 4. [Tema d'esame del 19/06/2017-C4]

La durata di un dispositivo è una variabile casuale X con funzione di densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x^2} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare la probabilità $P[X > 2 | X > 1]$.

$[e^{-6}]$

Esercizio 5. [Tema d'esame del 05/07/2016-C4]

Dopo aver calcolato la costante di normalizzazione della densità di probabilità di una variabile casuale continua X , definita da

$$f_X(x) = \begin{cases} Ce^{-2x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

calcolare $P[X > 1]$.

$[2; e^{-2}]$

Esercizio 6. Sia assegnata una variabile casuale X con densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Calcolare la corrispondente funzione di ripartizione.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}x & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Esercizio 7. La funzione di ripartizione di una variabile casuale X è

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{3}{4}x^2 \left(1 - \frac{1}{3}x\right) & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Determinare

a) $P \left[X > \frac{2}{3} \right],$

b) $P \left[-1 < X \leq 1 \right].$

$$\left[\begin{array}{l} P \left[X > \frac{2}{3} \right] = \frac{20}{27} \\ P \left[-1 < X \leq 1 \right] = \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

Esercizio 8. [tratto dal tema d'esame del 26/08/2015-C3]

a) Determinare il valore della costante C affinché $f_X(x)$ definita da

$$f_X(x) = \begin{cases} Cx(2-x) & \text{se } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{se } x < 0 \cup x > 2, \end{cases}$$

sia una funzione di probabilità nella variabile aleatoria continua X e tracciarne il grafico.

b) Determinare la corrispondente funzione di ripartizione F_X e tracciarne il grafico.

c) Calcolare $P[X > 1]$ e $E[X]$.

$$\left[\begin{array}{l} C = \frac{3}{4} \\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2(3-x) & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases} \\ P[X > 1] = \frac{1}{2} \\ E[X] = 1 \end{array} \right]$$

Esercizio 9. Determinare la funzione di densità associata alla funzione di ripartizione:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{50}x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 5 \\ -\frac{1}{50}x^2 + \frac{2}{5}x - 1 & \text{se } 5 < x \leq 10 \\ 1 & \text{se } x > 10 \end{cases}$$

Determinare, inoltre, $E[X]$

$$\left[f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{25}x^2 & 0 \leq x < 5 \\ -\frac{1}{25}x^2 + \frac{2}{5} & 5 \leq x < 10 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad E[X] = 5 \right]$$

Esercizio 10. [Tema d'esame del 08/07/2015-C4]

Data la densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} ax^2 + b & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

determinare b affinché si abbia $E[X] = 5/4$.

$$[a = \frac{3}{16}; b = \frac{1}{4}]$$

Esercizio 11. [Tema d'esame del 17/01/2012-C4]

Sia X una variabile casuale uniformemente distribuita sull'intervallo $\left[\frac{3a-5}{2}, \frac{3}{2}a-1\right]$.

Calcolare $\text{var}[X]$.

$\left[\frac{3}{16}\right]$

Esercizio 12. [Tema d'esame del 19/06/2012-C4]

Sia X la variabile casuale avente densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{16}x^2 & \text{se } -2 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Calcolare $\text{var}[X]$.

$\left[\frac{44}{25}\right]$

Esercizio 13. Il tempo di vita di un fusibile è una variabile casuale X di densità

$$f_X(x) = a^2 x \cdot e^{-ax} \cdot I_{[0,+\infty)}(x) \text{ con } a > 0$$

Calcolare il tempo di vita media.

$[\frac{2}{a}]$

Esercizio 14. [Tema d'esame del 29/08/2016-C3] (*funzione di variabile casuale*)

Se il tempo necessario per riparare un personal computer è una variabile casuale, misurata in ore, la cui densità è data da

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

il costo del lavoro per la riparazione è una variabile casuale $Y = 40 + 30\sqrt{x}$ euro, dove x sono le ore necessarie per la riparazione. Calcolare il valore atteso del costo di una riparazione.

$[68, 28 \text{ €}]$

Esercizio 15. [Tema d'esame del 09/06/2015-C6]

Sia X una variabile casuale discreta tale che $P[X = 0] = P[X = 6] = p$,
 $P[X = 3] = 1 - 2p$. Determinare il valore di p in modo tale che la deviazione standard sia 2.

[$\frac{1}{9}$]

Esercizio 16. [Tema d'esame del 15/01/2013-C3]

Una variabile aleatoria X può assumere solo i valori $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Sapendo che X ha la stessa probabilità di assumere i valori 1, 2, 3, 4 e che $E[X] = 1.5$, determinare $P[X = 0]$.

[0, 4]

Esercizio 17. [Tema d'esame del 02/07/2013-C4]

Sia X la variabile casuale uguale al numero di rigori segnati da un giocatore nei prossimi 3 turni di rigore. Sapendo che:

$$P[X = 1] = 0.3, \quad P[X = 2] = 0.2, \quad P[X = 0] = 3P[X = 3],$$

calcolare $E[X]$.

[1, 075]

Esercizio 18. Si consideri il lancio di una coppia di dadi indipendenti e non truccati. Sia X la variabile casuale discreta che denota il minimo dei punti usciti. Determinare

1. la funzione di massa di probabilità e tracciarne il grafico;
2. la funzione di ripartizione F_X e tracciarne il grafico;
3. la probabilità che lanciando i dadi il minimo dei punti usciti sia al più 3;
4. $P[X > 5]$, $P[2 < X \leq 4]$ e $P[2 \leq X \leq 4]$;
5. $E[X]$, $\text{var}[X]$ e σ_X .

$$\left[\begin{array}{l} f_X(x) = \begin{cases} \frac{11}{36} & x = 1 \\ \frac{1}{4} & x = 2 \\ \frac{7}{36} & x = 3 \\ \frac{5}{36} & x = 4 \\ \frac{1}{12} & x = 5 \\ \frac{1}{36} & x = 6 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{11}{36} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{5}{9} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{4} & 3 \leq x < 4 \\ \frac{8}{9} & 4 \leq x < 5 \\ \frac{35}{36} & 5 \leq x < 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases} \\ P[X \leq 3] = \frac{3}{4} \\ P[X > 5] = \frac{1}{36} \\ P[2 < X \leq 4] = \frac{1}{3} \\ P[2 \leq X \leq 4] = \frac{7}{12} \end{array} \right. \begin{array}{l} E[X] = \frac{91}{36} \\ \text{var}[X] = 1,9715 \\ \sigma_X = 1,40 \end{array}$$

Esercizio 19. [Tratto dal tema d'esame del 07/01/2014-C3]

Sia X la variabile aleatoria avente densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{9} & \text{se } -1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Calcolare $E[X]$, il momento assoluto del secondo ordine e $\text{var}[X]$.

$$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{43}{80}\right]$$

Esercizio 20. Sapendo che $E[X] = 2$, $E[X^2] = 8$, calcolare $E\left[4(1 + 2X)^2\right]$.

$$[164]$$

Esercizio 21. Sia assegnata una variabile casuale X con densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{8} (4x - 2x^2) & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Calcolare $E[X]$, $\text{var}[X]$ e σ_X .

$$\left[1, \frac{1}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right]$$

Esercizio 22. Un'urna contiene 30 palline numerate da 1 a 30. Sia X la variabile casuale che denota il resto della divisione col numero 6 del numero inciso sulla pallina estratta.

Determinare $E[X]$, $\text{var}[X]$ e σ_X .

$$\left[\frac{15}{6}; \frac{35}{12}; 1, 71 \right]$$

Esercizio 23. [Tema d'esame del 28/06/2005-C3]

Sia assegnata una variabile casuale X con densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} -\frac{1}{15}x^2 + \frac{2}{5} & \text{se } -2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Calcolare $E[X]$.

$$\left[-\frac{7}{20} \right]$$

Esercizio 24. [Tema d'esame del 28/06/2005-E2]

La quantità (in quintali) di rifiuti smaltiti da un'industria in giornata è una variabile aleatoria X con densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} kx & \text{se } 0 \leq x \leq 5a \\ k(10a - x) & \text{se } 5a < x \leq 10a \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Nel caso in cui $a = \frac{6}{5}$, si chiede:

1. Calcolare k e disegnare il grafico di $f_X(x)$.
2. Considerati gli eventi

$$A = \{\text{i rifiuti smaltiti sono più di } 5a \text{ quintali}\}$$

$$B = \{\text{i rifiuti smaltiti sono meno di } 5a \text{ quintali}\}$$

$$C = \{\text{la quantità di rifiuti smaltiti è compresa tra } 2.5a \text{ e } 7.5a \text{ quintali}\},$$

calcolare la probabilità $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A|B)$, $P(A|C)$. Gli eventi A e B sono indipendenti? Gli eventi A e C sono indipendenti?

$$\left[\begin{array}{l} k = \frac{1}{36} \\ P(A) = P(B) = \frac{1}{2} \\ P(C) = \frac{3}{4} \\ P(A|B) = 0 \\ P(A|C) = \frac{1}{2} \\ A, B \text{ dipendenti} \\ A, C \text{ indipendenti} \end{array} \right]$$

Esercizio 25. [Tema d'esame del 07/12/2004 - es 2]

Il tempo, in ore, della durata di funzionamento di un computer (prima di bloccarsi) è una variabile aleatoria continua data da

$$f_X(x) = \begin{cases} C e^{-\frac{x}{100}} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

1. Determinare la costante C di normalizzazione e tracciare il grafico di $f_X(x)$.
2. Determinare la corrispondente funzione di ripartizione F_X e tracciarne il grafico.
3. Qual è la probabilità che il computer funzioni tra le 50 e le 150 ore prima di bloccarsi?

$$\left[C = \frac{1}{100}; F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{100}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}; 0,3834 \right]$$

Esercizio 26. [Tema d'esame del 22/12/2003 - es 2]

1. Verificare che la seguente funzione

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \\ \ln x & \text{se } 1 < x \leq e \\ 1 & \text{se } x > e \end{cases}$$

è una funzione di ripartizione di una variabile casuale X e tracciarne il grafico.

2. Determinare la corrispondente funzione di densità f_X e tracciarne il grafico.

3. Calcolare $E[X]$ e $\text{var}[X]$.

4. Calcolare $P[X > 3]$ e $P[X > 2]$.

$$\left[\begin{array}{lll} f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & 1 < x \leq e \\ 0 & x > e \end{cases} & \begin{array}{l} E[X] = e - 1 \\ \text{var}[X] = \frac{1}{2}(e - 1)(3 - e) \end{array} & \begin{array}{l} P[X > 3] = 0 \\ P[X > 2] = 1 - \ln 2 \end{array} \end{array} \right]$$

Esercizio 27. [Tratto dal tema d'esame del 22/12/2003 - es 4]

Sia X la variabile casuale avente funzione di densità

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-(x-2)} & \text{se } x > 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Determinare la corrispondente mediana, $\text{med}[X]$.
2. Siano X_1, \dots, X_n n variabili casuali indipendenti e ciascuna con la stessa densità di probabilità f_X . Sia $Y = \min[X_1, \dots, X_n]$. Calcolare la funzione di ripartizione e la funzione di densità della variabile casuale Y .

$$\left[\text{med}[X] = 2 + \ln 2 \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 2 \\ 1 - e^{-n(y-2)} & y > 2 \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 2 \\ ne^{-n(y-2)} & y > 2 \end{cases} \right]$$

Esercizio 28. [Tema d'esame del 11/09/2012-E2]

Sia X la variabile aleatoria avente densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} 2 \cos(2x) & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{4}, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

1. determinare la funzione di ripartizione F_X ;
2. calcolare $P[X > \frac{\pi}{6}]$;
3. determinare la media $E[X]$;
4. determinare $E\left[\frac{1}{\cos(2X)}\right]$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \sin(2x) & \text{se } 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ 1 & \text{se } x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$P[X > \frac{\pi}{6}] = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$E[X] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

$$E\left[\frac{1}{\cos(2x)}\right] = \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 29. [Tema d'esame del 03/07/2007-E2] (funzione di variabile casuale)

Sia X una variabile casuale avente densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{k}{\sqrt{x}} & \text{se } 0 < x \leq 4, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

1. Calcolare la costante k di normalizzazione.
2. Determinare la funzione di ripartizione F_X .
3. Calcolare $\text{var}[X]$.
4. Calcolare $P\left[\frac{16}{9} \leq X \leq 8\right]$.
5. Calcolare $E[\sqrt{X}]$.

$$\left[\begin{array}{l} k = \frac{1}{4} \\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{x} & 0 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases} \\ \text{Var}[X] = \frac{64}{45} \\ P\left[\frac{16}{9} \leq X \leq 8\right] = \frac{1}{3} \\ E[\sqrt{X}] = 1 \end{array} \right]$$

Esercizio 30. [Tema d'esame del 16/06/2009-E2]

Data la funzione di ripartizione

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}(1 + \sin x) & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 1 & x \geq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

- (a) determinare la funzione di densità;
- (b) calcolare $P\left[0 < X < \sqrt{77} \mid X < \frac{\pi}{4}\right]$;
- (c) verificare se gli eventi $\left\{-\frac{\pi}{4} < X < \frac{\pi}{4}\right\}$, $\left\{0 < X < \frac{\pi}{2}\right\}$ sono indipendenti;
- (d) calcolare $E[2X - \pi]$.

$$\left[\begin{array}{l} f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos x & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \\ P[0 < X < \sqrt{77} \mid X < \frac{\pi}{4}] = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \\ \text{indipendenti} \\ E[2X - \pi] = -\pi \end{array} \right]$$