

Probabilità e Statistica

Variabili Casuali multidimensionali

Marco Pietro Longhi

C.d.L.: Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni, Ingegneria Informatica
a.s. 2018/2019

Esercizio

Due fabbriche diverse producono lo stesso componente per macchinari. I pezzi vengono classificati in base alla fabbrica che li ha prodotti e ai loro difetti. Sia X il numero della fabbrica (1 o 2) e Y il numero dei difetti per pezzo (0, 1, 2 o 3), di un pezzo scelto a caso tra la totalità di quelli esistenti. La tabella seguente riporta la funzione di massa di probabilità congiunta delle variabili casuali discrete X e Y .

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$
$X = 2$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

- 1 Determinare le distribuzioni marginali di X e Y .
- 2 Calcolare $E[X]$, $E[Y]$, $\text{var}[X]$ e $\text{var}[Y]$.
- 3 Determinare la covarianza $\text{cov}[X, Y]$ delle variabili X e Y .

- 1 Determinare la funzione di densità di probabilità condizionata di X dato $Y = 2$.
- 2 Determinare la funzione di ripartizione condizionata di X dato $Y = 2$.
- 3 Determinare la funzione di densità di probabilità condizionata di Y dato $X = 1$.
- 4 Determinare la funzione di ripartizione condizionata di Y dato $X = 1$.
- 5 Determinare $E[X|Y = 3]$.

$$\left[\dots, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{15}{8}, \frac{79}{64}, \frac{1}{8}, \dots \right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 10/07/2017-C5]

Sia (X, Y) una coppia di variabili casuali discrete con la seguente funzione di densità di probabilità congiunta:

	$X = -1$	$X=0$	$X=1$
$Y = -1$	$1/5$	0	$1/5$
$Y = 0$	0	b	0
$Y = 1$	$1/5$	0	$1/5$

Determinare la covarianza $\text{cov}[X, Y]$.

Esercizio

[Tema d'esame del 10/01/2006-E1]

Sia X una variabile aleatoria che assume i valori $\{0, 1\}$ e Y una variabile aleatoria che assume i valori $\{2, 3\}$. Sapendo che

$$P[Y = 2] = \frac{2}{5}$$

$$P[X = 0|Y = 2] = [Y = 2|X = 0] = \frac{1}{3}$$

calcolare la densità di probabilità congiunta di X e Y e la $\text{cov}[X, Y]$.

$$\begin{bmatrix} p_{X,Y}(0,2) = \frac{2}{15} \\ p_{X,Y}(0,3) = \frac{4}{15} \\ p_{X,Y}(1,2) = \frac{4}{15} \\ p_{X,Y}(1,3) = \frac{1}{3} \\ \text{cov}[X, Y] = -\frac{2}{75} \end{bmatrix}$$

Esercizio

[Tema d'esame del 29/08/2016-C4]

Sia X una variabile aleatoria che assume i valori $\{0, 1\}$ ed Y una variabile aleatoria che assume i valori $\{2, 3\}$. Sapendo che

$$P[Y = 2] = \frac{2}{5}, \quad P[X = 0|Y = 2] = P[Y = 2|X = 0] = \frac{1}{3},$$

calcolare la $P[X = 1|Y = 3]$.

[5/9]

Esercizio

[Tema d'esame del 08/07/2015-C5]

Il numero x è scelto a caso nell'insieme $\{0, 2, 4, 6\}$, il numero y è scelto a caso nell'insieme $\{2, 3, 6, 9, 11\}$. Calcolare $P[X \geq Y \mid Y \text{ dispari}]$.

$\left[\frac{1}{6}\right]$

Esercizio

[Tema d'esame del 27/08/2018-C7]

Sia (X, Y) una coppia di variabili casuali discrete con la seguente densità di probabilità congiunta

	$X = -3$	$X=0$	$X=5$
$Y=0$	p	0	q
$Y=1$	$3q$	$2p$	0

Determinare il valore di p affinché $E[X + Y] = -7/24$.

$\left[\frac{1}{6}\right]$

Esercizio

Lanciamo tre volte una moneta e indichiamo con X la variabile casuale che denota il numero di volte in cui si ottiene testa e con Y la variabile casuale che denota il valore assoluto della differenza tra il numero di teste e il numero di croci ottenute.

Determinare:

- 1 la funzione di densità di probabilità congiunta di X e Y ;
- 2 le funzioni di densità di probabilità marginali di X e di Y .

$Y \backslash X$	0	1	2	3	$f_Y(y)$
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$f_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	

Esercizio

Un'azienda stipula un contratto per vendere barattoli di conserva di 500g. La quantità di conserva X messa in ciascun barattolo è predeterminata meccanicamente ed è normalmente distribuita con media μ e deviazione standard 25g.

- 1 A quale valore di μ deve essere tarata la macchina, affinché il 2% dei barattoli contenga meno di 500g di conserva?
- 2 Supponiamo che i barattoli siano di metallo e che il loro peso Y da vuoti segua una distribuzione $N(90, 8)$. Se un ispettore pesa i barattoli pieni e scarta quelli il cui peso è inferiore 590g, quale percentuale di barattoli non passerà l'ispezione?

[551.4, 0.025]

Esercizio

[Tema d'esame del 15/01/2013-C4]

Sia (X, Y) una coppia di variabili casuali discrete con la seguente densità di probabilità congiunta

$Y \backslash X$	-1	0	3
0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0

Determinare $E[X + 2Y]$.

Esercizio

[Tema d'esame del 10/07/2012-E2]

Si lanci due volte una moneta non truccata e sia X la variabile aleatoria pari alla differenza tra il numero di teste e il numero di croci ottenute e $Y = X^2 + 1$.

- 1 Determinare la funzione di probabilità congiunta;
- 2 determinare le funzioni di densità marginali;
- 3 stabilire se X e Y sono indipendenti;
- 4 calcolare la covarianza $\text{cov}[X, Y]$.

$Y \backslash X$	-2	0	2	
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

X, Y dipendenti, $\text{cov}[X, Y]=0$

Esercizio

[Tema d'esame del 13/06/2018-C6]

Sia (X, Y) una coppia di variabili casuali discrete con la seguente densità di probabilità congiunta

$Y \backslash X$	-4	0	1
0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0

Determinare la covarianza $\text{cov}[X, Y]$.


$$\left[\text{cov}[X, Y] = -\frac{5}{32} \right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 02/07/2018-C5 e del 26/03/2018-C5]

Sia (X, Y) una coppia di variabili casuali discrete con la seguente densità di probabilità congiunta

$Y \backslash X$	0	1	3
-1	$\frac{p}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{p}{4}$	$\frac{1}{4}$	0

- 1 determinare il valore di ρ ;
- 2 calcolare il coefficiente di correlazione $\rho[5X, 3Y]$.

$$\left[\rho = \frac{1}{3}, \rho = -\frac{2}{9}\sqrt{6} \right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 02/07/2018-C8]

Siano X, Y due variabili casuali con $Y = 2\pi X + 7$. Calcolare il coefficiente di correlazione $\rho_{X,Y}$.

$$[\rho_{X,Y} = 1]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 26/03/2018-QT1]

Date due variabili casuali X ed $Y = X + 2$, dimostrare che il coefficiente di correlazione è:

$$\rho_{X,Y} = 1.$$

Esercizio

[Tema d'esame del 15/04/2019-C8]

Date 6 variabili casuali X_1, \dots, X_6 indipendenti ed identicamente distribuite, con varianza pari a 4, calcolare la varianza della funzione media campionaria \bar{X}_6 .

$$\left[\sigma(\bar{X}_6) = \frac{2}{\sqrt{3}} \right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 05/09/2011-E1]

Un'urna contiene dodici palline numerate (due con inciso il numero 1, due con inciso il numero 3, quattro con inciso il numero 2 e quattro con inciso il numero 4). Si estrae una pallina dall'urna. Siano X la variabile casuale che indica il numero inciso sulla pallina estratta e Y la variabile casuale definita da $Y = \frac{1}{2}(X - 2)^2$.

- 1 Determinare la densità congiunta $f_{X,Y}$.
- 2 Determinare le densità marginali f_X, f_Y .
- 3 Verificare se X e Y sono indipendenti.

- 1 Calcolare $\text{cov}[X, Y]$.
- 2 Calcolare $P\left[X > 2 \mid Y = \frac{1}{2}\right]$.

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f_{X, Y}(2, 0) = f_{X, Y}(4, 2) = \frac{1}{3} \\ f_{X, Y}(1, \frac{1}{2}) = f_{X, Y}(3, \frac{1}{2}) = \frac{1}{6} \\ f_X(1) = f_X(3) = \frac{1}{6} \\ f_X(2) = f_X(4) = \frac{1}{3} \end{array} \right. \\ f_Y(0) = f_Y(\frac{1}{2}) = f_Y(2) = \frac{1}{3} \\ \\ \text{cov}[X, Y] = \frac{7}{9} \\ P[X > 2 \mid Y = \frac{1}{2}] = \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

Esercizio

[Tratto dal Tema d'esame del 22/12/2003-E4]

Sia X la variabile casuale avente funzione di densità

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-(x-2)} & \text{se } x > 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Siano X_1, X_2, \dots, X_n n variabili casuali indipendenti e ciascuna con la stessa densità di probabilità f_X . Sia $Y = \min[X_1, X_2, \dots, X_n]$. Calcolare la funzione di ripartizione e la funzione di densità della variabile casuale Y .

$$\left[F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-n(y-2)} & \text{se } y > 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} ne^{-n(y-2)} & \text{se } y > 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 30/06/2009-C4]

Siano X una variabile casuale di Poisson di parametro λ e Y una variabile casuale di densità

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{6}{y^7} & y > 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare il valore di λ che soddisfa

$$E[X + Y] = \frac{7}{5}.$$

[1/5]