

# Probabilità e Statistica

## Calcolo combinatorio

Marco Pietro Longhi

C.d.L.: Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni, Ingegneria Informatica  
a.s. 2019/2020

Dati  $n$  oggetti distinti, si dicono *disposizioni semplici di  $n$  oggetti di classe  $k$* , tutti i gruppi che si possono formare di  $k$  elementi, in modo che due gruppi differiscano

- o per l'ordine,
- o per almeno un elemento.

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

### Esercizio

Quanti numeri di due cifre distinte si possono formare con gli elementi dell'insieme  $A = \{1, 5, 3, 8\}$ ?

*Risoluzione.*



$$D_{4,2} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 12.$$

Dati  $n$  oggetti distinti, si dicono *disposizioni con ripetizioni di classe  $k$* , tutti i gruppi che si possono formare di  $k$  elementi, con la possibilità di ripetizione degli elementi, in modo che due gruppi differiscano

- o per l'ordine,
- o per almeno un elemento,
- o per la ripetizione.

$$D_{n,k}^* = n^k.$$

### Esercizio

Quanti numeri di due cifre si possono formare con gli elementi dell'insieme  $A = \{1, 5, 3, 8\}$ ?

*Risoluzione.*



$$D_{4,2}^* = 4^2 = 16.$$

Dati  $n$  oggetti distinti, si dicono *permutazioni semplici di  $n$  elementi*, tutti i gruppi che si possono formare con gli  $n$  elementi, in modo che due gruppi differiscano

- per l'ordine degli elementi.

$$P_n = D_{n,n} = n!.$$

### Esercizio

In quanti modi 3 diverse persone possono sedersi sulle 3 poltrone di una fila di un palco a teatro?

*Risoluzione.*



$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Dati  $n$  oggetti distinti, si dicono *combinazioni semplici di  $n$  oggetti di classe  $k$* , tutti i gruppi che si possono formare con  $k$  degli  $n$  elementi, in modo che due gruppi differiscano

- per almeno un elemento.

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

### Esercizio

Un barman ha a disposizione 4 liquori base, quanti cocktails può ottenere mescolandone 3 alla volta?

*Risoluzione.*

$$C_{4,3} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4.$$

Vogliamo disporre 5 oggetti ( $k = 5$ ) in 3 scatole distinte ( $n = 3$ ).  
In quanti modi diversi lo possiamo fare?

Iniziamo a fare lo schema di una possibile configurazione

\* \* \* | | \* \*

Lo schema rappresenta la sequenza: nella prima scatola tre oggetti, nella seconda nessun oggetto, nella terza scatola due oggetti

Ma quante sono le configurazioni possibili?

Consideriamo i 7 simboli che formano lo schema:

5 asterischi  $*$  ( $k = 5$ ),  
2 separatori  $|$  ( $n - 1 = 2$ ),  
totale  $n + k - 1 = 7$

1	2	3	4	5	6	7
*	*	*			*	*

---

Ogni permutazione dei 7 simboli rappresenta una configurazione.

Ad esempio la permutazione

*		**		**
---	--	----	--	----

---

corrisponde ad un solo oggetto nella prima scatola e due in ciascuna delle altre due.

Lo schema



descrive la configurazione: tutti e cinque gli oggetti nella terza scatola. Ma se permutiamo fra loro i  $k = 5$  asterischi “\*” la configurazione non cambia; allo stesso modo se permutiamo fra loro gli  $n - 1 = 2$  separatori “|”.

Quindi le configurazioni distinte possibili sono

$$\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k} = C_{n+k-1, k}.$$

Dati  $n$  oggetti distinti, si dicono *combinazioni di  $n$  oggetti con ripetizione di classe  $k$* , tutti i gruppi che si possono formare con  $k$  degli  $n$  elementi, con la possibilità di ripetizione degli elementi, in modo che due gruppi differiscano

- o per almeno un elemento,
- o per la ripetizione.

$$C_{n,k}^* = \binom{n+k-1}{k} = C_{n+k-1,k}.$$

## Esercizio

Sia  $A = \{\nabla, \otimes\}$  quante sequenze di 3 simboli si possono formare scegliendo gli elementi in  $A$ ?

*Risoluzione.* Le sequenze possibili sono  $\nabla\nabla\nabla$ ,  $\nabla\nabla\otimes$ ,  $\otimes\nabla\otimes$ ,  $\otimes\otimes\otimes$ , ricordiamo che la sequenza  $\nabla\nabla\otimes$  coincide con la sequenza  $\nabla\otimes\nabla$  in quanto entrambe hanno 2  $\nabla$  e 1  $\otimes$ . Ne segue

$$C_{2,3}^* = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4.$$

Usando lo schema “scatole - oggetti”, i simboli  $\nabla$ ,  $\otimes$  sono le “scatole”.  
Lo schema

**	*
$\nabla$	$\otimes$

rappresenta la sequenza  $\nabla\nabla\otimes$ .

Ad esempio, la sequenza  $\otimes\otimes\otimes$  é rappresentata dallo schema

	***
$\nabla$	$\otimes$

Pertanto le terne possibili sono:

$$C_{2,3}^* = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4.$$

## Esercizio

In una partita di calcio fra amici Giorgio, Marco e Luca segnano complessivamente 7 reti. Quante sono le possibili distribuzioni delle reti fra loro?

*Risoluzione.*

G	M	L

Le “scatole” rappresentano i tre amici, mentre l’asterisco \* “rappresenta la rete”.

La sequenza: una rete segnata da Giorgio, quattro da Marco e due da Luca é rappresentata dallo schema

*	* * * *	**
G	M	L

Pertanto le sequenze di reti possibili sono:

$$C_{3,7}^* = \binom{9}{7} = \frac{9!}{7! \cdot 2!} = 36.$$

## Esercizio

In quanti modi diversi 3 fratelli si possono spartire 8 cioccolatini?

*Risoluzione.*

Le “scatole” rappresentano i tre fratelli, mentre l’asterisco \* “rappresenta il cioccolatino”.

Ad esempio, la sequenza: il primo fratello prende 5 cioccolatini, uno il secondo e due il terzo é rappresentata dallo schema

$$\underline{* * * * * \mid * \mid **}$$

Le possibili “distribuzioni di cioccolatini” quindi sono:

$$C_{3,8}^* = \binom{10}{8} = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = 45.$$

Dati  $n$  oggetti di cui  $r_1$  uguali tra loro,  $r_2$  uguali tra loro e distinti dai precedenti,  $\dots$ ,  $r_k$  uguali tra loro e distinti dai precedenti, con

$$r_1 + r_2 + \dots + r_k = n,$$

si dicono *permutazioni con ripetizione di  $r_1 + r_2 + \dots + r_k$  oggetti*, tutti i gruppi che si possono formare con gli  $n$  elementi, di cui alcuni indistinguibili in modo che due gruppi differiscano

- per l'ordine.

$$P_{r_1, r_2, \dots, r_k}^* = \frac{(r_1 + r_2 + \dots + r_k)!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$$

## Esercizio

Quanti sono gli anagrammi della parola **AFA**?

*Risoluzione.* Si ha  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 1$ . Quindi il numero degli anagrammi è

$P_{2,1}^* = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$ . Infatti, gli anagrammi possibili sono,

**AFA, AAF, FAA**

## Esercizio

Si supponga di avere un'urna con 40 numeri distinti e di estrarne 6. Quanti sono i casi possibili se

9.1 l'estrazione avviene senza reinserimento e la sequenza delle estrazioni caratterizza la sestupla estratta;

*Risoluzione.* Si tratta di *disposizioni semplici* di 40 oggetti di classe 6

$$D_{40,6} = 40 \cdot 39 \cdot \dots \cdot (40 - 6 + 1) = \frac{40!}{(40 - 6)!} = \frac{40!}{(34)!} = 2763633600.$$

9.2 l'estrazione avviene senza reinserimento e la sequenza delle estrazioni NON caratterizza la sestupla estratta;

*Risoluzione.* Si tratta di *combinazioni semplici* di 40 oggetti di classe 6

$$C_{40,6} = \binom{40}{6} = 3838380.$$

9.3 l'estrazione avviene con reinserimento e la sequenza delle estrazioni caratterizza la sestupla estratta;

*Risoluzione.* Si tratta di *disposizioni di 40 oggetti con ripetizione di classe 6*

$$D_{40,6}^* = 40^6 = 4096000000.$$

9.4 l'estrazione avviene con reinserimento e la sequenza delle estrazioni NON caratterizza la sestupla estratta.

*Risoluzione.*

Si tratta di *combinazioni di 40 oggetti con ripetizione di classe 6*

$$C_{40,6}^* = \binom{45}{6} = \frac{45!}{6! \cdot 39!} = 8145060.$$

In generale data un'urna con  $n$  numeri distinti, se vogliamo estrarre una  $k$ -pla, il numero dei gruppi possibili, in base alle quattro modalità di estrazione, é riassunto nel seguente schema

	senza reinserimento	con reinserimento
gruppi ordinati	$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$D_{n,k}^* = n^k$
gruppi non ordinati	$C_{n,k} = \binom{n}{k}$	$C_{n,k}^* = \binom{n+k-1}{k}$

# Esercizi

## Esercizio

In quanti modi diversi quattro persone possono occupare quattro di cinque posti numerati?

[120]

## Esercizio

Sia  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

- 1 Quanti numeri di tre cifre distinte si possono formare con i numeri dell'insieme  $A$ ?
- 2 quanti di questi numeri sono dispari?
- 3 quanti terminano con 9?
- 4 quanti sono maggiori di 700?

[504, 280, 56, 168]



## Esercizio

Sia  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

- 1 Quanti numeri di tre cifre anche ripetute si possono formare con i numeri di  $A$ ?
- 2 quanti di questi numeri sono dispari?
- 3 quanti sono maggiori di 700?

[729, 405, 243]

## Esercizio

(Tema d'esame del 08/04/19 – 1° Test - C1)

In un'urna ci sono 9 palline. Tre hanno inciso il numero "1", tre il numero "2", tre il numero "3". Estrahendo una pallina una dopo l'altra (senza reimmissione) fino ad esaurire tutte le palline e segnando da sinistra a destra la cifra corrispondente, si costruisce un numero a nove cifre. Calcolare quanti numeri distinti di nove cifre sia possibile ottenere in questo modo.

[1680]

[Liberamente tratto da “Elementi di Termodinamica Statistica” Dip. Scienza dei Materiali -  
Università di Milano Bicocca ]

## Esercizio

Consideriamo un sistema composto da 5 particelle con spin  $s = \frac{1}{2}$ , il quale può essere orientato in posizione *up* ( $\uparrow$ ) o in posizione *down* ( $\downarrow$ )  
Supponiamo che le particelle non interagiscano fra loro  
(indipendenza).

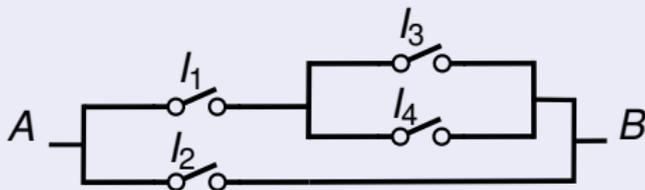
- a) Quante sono le configurazioni che presentano 3 spin *up* ?
- b) e 2 spin *up* ?

[10, 10]

[Tratto da "Elementi di Termodinamica Statistica" Dip. Scienza dei Materiali - Università di Milano Bicocca ]

## Esercizio

Nel circuito in figura gli interruttori ( $I_i, i = 1, 2, 3, 4$ ) possono essere o aperti (0) o chiusi (1). Quante sono le possibili configurazioni che permettono il passaggio di corrente tra  $A$  e  $B$ ?



[11]

## Esercizio

(Tema d'esame del 13/01/15-C1)

Determinare in quanti modi diversi si può vestire una persona che possiede 10 abiti, 5 paia di scarpe e 2 cappelli, scegliendo un oggetto da ogni categoria.

[100]

## Esercizio

Quanti sono i numeri di tre cifre che si possono formare con i numeri  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  costituiti da

- 1 cifre tutte distinte?
- 2 cifre anche ripetute?

[448, 648]

### Esercizio

Quanti anagrammi si possono formare con la parola DERIVATO?  
quanti di questi anagrammi finiscono con ATO?

[40320, 120]

### Esercizio

Quanti anagrammi si possono formare con la parola STATISTICA?  
quanti di questi anagrammi iniziano per S?

[75600, 15120]

### Esercizio

In quanti modi si possono distribuire 5 quaderni uguali a 4 bambini?

[56]

## Esercizio

Le iniziali del nome e del cognome di una persona si dicono "cifre" e vengono stampate sulla copertina di un'agenda. Se si vogliono preparare gli stampi per tutte le cifre che si possono formare con le 26 lettere dell'alfabeto internazionale, quanti stampi é necessario disporre?

[676]

## Esercizio

Quanti terni si possono formare con i 90 numeri del lotto?

[117480]

## Esercizio

A un concorso per due posti di impiegato, rispettivamente negli uffici del magazzino e del personale di un'azienda partecipano 15 concorrenti. In quanti modi possibili tra i concorrenti vi possono essere due vincitori?

[210]

---

## Esercizio

(Tema d'esame del 05/07/16-C1) A un concorso con 3 posti partecipano 10 concorrenti. Quali sono le possibili terne di vincitori?

[120]

---

## Esercizio

Determinare quanti colori si possono ottenere combinando in tutti i modi possibili i sette colori dell'iride.

$$\left[ \sum_{k=1}^7 C_{7,k} \right]$$

## Esercizio

I geni (cioè i portatori di caratteri ereditari) compaiono in coppia in ogni cellula di un individuo. Nel caso più semplice ogni gene può presentarsi sotto due forme distinte (dette *alleli*) che indichiamo con  $A_1$  ed  $A_2$ . Possiamo allora rappresentare questi tre tipi diversi di geni (detti *genotipi*) come

$$A_1 A_1, \quad A_1 A_2, \quad A_2 A_2.$$

Quanti genotipi fornisce un gene con tre alleli?

[6]

## Esercizio

(Tema d'esame del 06/09/05-C3) Una serratura si apre con un codice decimale di tre cifre. Sapendo che due cifre sono dispari, scelte tra  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ , e una pari, scelta tra  $\{0, 2, 4, 6\}$ , trovare il numero massimo di tentativi che bisogna effettuare per aprire la serratura.

[300]

## Esercizio

Sei amici, tre uomini e tre donne, si recano a teatro dove hanno prenotato una fila di 6 posti consecutivi. Se si vogliono sedere alternandosi uomini e donne, quante sono le possibili sistemazioni?

[72]

## Esercizio

Una vettura ferroviaria ha 6 posti nel verso di marcia e 6 nel senso contrario, in quanti modi si possono disporre 6 viaggiatori di cui 4 vogliono sedersi nel senso di marcia e 2 nel senso opposto?

[10800]

## Esercizio

In quanti modi un gruppo di sette persone si può disporre

- 1 in sette sedie allineate?
- 2 intorno ad un tavolo circolare?

[5040, 720]

## Esercizio

(Tema d'esame del 26/08/15-C6) In quanti modi si possono mettere in fila 4 ragazzi e 3 ragazze in modo che i ragazzi siano tutti vicini tra loro e le ragazze tutte vicine tra loro?

[288]

## Esercizio

Un'agenzia turistica organizza viaggi che prevedono la visita a quattro fra dieci prestabilite città. Calcolare

- 1 in quanti diversi modi un turista può scegliere le quattro città;
- 2 in quanti diversi modi l'agenzia può fissare gli itinerari.

[210, 5040]

## Esercizio

Quanti numeri con meno di 5 cifre si possono formare, se si vuole che abbiano tutte le cifre dispari?

[780]

## Esercizio

Un'urna contiene dieci palline bianche e cinque nere. Determinare in quanti modi quattro palline possono essere estratte dall'urna nell'ipotesi che esse

- 1 possano essere di qualsiasi colore;
- 2 debbano essere due bianche e due nere;
- 3 debbano essere tutte bianche;
- 4 debbano essere tutte nere;
- 5 debbano essere dello stesso colore.

[1365, 450, 210, 5, 215]

## Esercizio

Considerando un mazzo di quaranta carte, calcolare quante possibili coppie si possono formare estraendo

- 1 due carte contemporaneamente;
- 2 due carte successivamente senza rimettere la prima carta estratta nel mazzo;
- 3 due carte successivamente rimettendo la prima carta nel mazzo.

[780, 1560, 1600]

---

## Esercizio

Date nel piano 12 rette determinare il numero dei punti di intersezione sapendo che 5 sono parallele e le rimanenti sono a due a due incidenti.

[56]

## Esercizio

(Tema d'esame del 05/07/11-C3)

Per aprire una porta blindata, occorre digitare un codice segreto formato da due vocali distinte seguite da tre cifre scelte tra  $\{0, \dots, 9\}$ . Calcolare il numero di codici che contengono almeno una delle cifre 0, 1, 2.

[13140]

## Esercizio

(Tema d'esame del 18/04/18 – 1° Test)

Un prodotto viene etichettato stampando 6 linee sottili, 5 linee medie e 3 linee spesse. Se ad ogni sequenza di linee corrisponde una diversa etichetta, quante diverse etichette si possono realizzare con questo schema?

[168168]

## Esercizio

(Tema d'esame del 15/04/19-C3)

In quanti modi é possibile eleggere 4 rappresentanti da un gruppo di 21 uomini se due di essi non possono essere eletti insieme?

[5814]

---