Probabilità e Statistica

Probabilità

Marco Pietro Longhi

C.d.L.: Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni, Ingegneria Informatica
a.s. 2019/2020

Calcolo della probabilitá

Esercizio

Da un collettivo che ha la seguente composizione per classi di etá si sceglie a caso un individuo

classi di etá		frequenza
[10; 20)		10
[20; 30)		30
[30; 40)		50
[40; 50)		30
[50; 60)		20
[60; 70)		20
[70; 80)		20
	totale	180

Nell'ipotesi che ciascun individuo abbia la stessa probabilitá di essere scelto dal collettivo, si determinino le probabilitá relative ai seguenti eventi:

1. l'individuo scelto abbia meno di 50 anni;
2. l'individuo scelto abbia un'etá non inferiore ai 60 anni;
3. l'individuo scelto abbia un'etá non inferiore ai 20 anni, ma inferiore ai 50 anni.

[$2/3$, $2/9$, $11/18$]

Esercizio

[Tema d'esame del 21/03/2016-C2]
Dati due eventi indipendenti A e B, calcolare le probabilità $P(A)$ e $P(B)$ sapendo che la probabilità che si presentino contemporaneamente è pari a $1/36$, mentre la probabilità che nessuno dei due si verifichi è pari a $17/36$.

$[\frac{1}{18}, \frac{1}{2}]$

Esercizio

[Tema d'esame del 08/07/2015-C2]
Siano A, B, C tre eventi tali che $\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = 1$, $\mathrm{P}(B) = 2\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(C) = 2/5$. Inoltre si sa che A e C sono indipendenti, A e B sono incompatibili, B e C sono incompatibili. Determinare $\mathrm{P}(A)$.

$[\frac{3}{13}]$

Esercizio

[Tema d'esame del 26/08/2015-C2]
Dati due eventi A e B indipendenti, tali che $P[A] = \frac{2}{5}$ e $\mathrm{P}[\bar{\mathrm{A}} \cap \bar{\mathrm{B}}] = \frac{2}{7}$, determinare P[B].

$[\frac{11}{21}]$

Esercizio

[Tema d'esame del 15/01/2018-QT2]
Dati tre eventi indipendenti A, B, C, dimostrare che:

$$P\left[A \cup B \cup C\right] = 1 - P\left[\overline{A}\right] \cdot P\left[\overline{B}\right] \cdot P\left[\overline{C}\right].$$

Esercizio

[Tema d'esame del 18/05/2018-C4]
Dati due eventi A e B indipendenti, tali che

$$P[A] = \frac{2}{5} \text{ e } \mathrm{P}[\bar{\mathrm{A}} \cap \bar{\mathrm{B}}] = \frac{1}{6},$$

determinare P[B].

$[\frac{13}{18}]$

Esercizio

[Tema d'esame del 17/06/2019-C8]
Siano A e C eventi incompatibili con l'evento B. Stabilire, motivando la risposta, se sia vero o falsa la seguente affermazione:

$$P[A \cup B|C] = P[A|C]\,.$$

[*vero*]

Esercizio

[Tema d'esame del 08/04/2019-C4 1° Test]
In una catena di montaggio si eseguono due operazioni in sequenza. Le due operazioni sono indipendenti. Le probabilità che le operazioni riescano senza difetti sono rispettivamente 0.9 e 0.8. Calcolare la probabilità che nessuna delle due operazioni riesca.

[0.02]

Esercizio

[Tema d'esame del 17/06/2019-C1]
Si effettuano tre tiri verso il medesimo bersaglio. Le probabilità di colpirlo al primo, al secondo ed al terzo colpo sono, rispettivamente, uguali a 0.4, 0.5, 0.7. Calcolare la probabilità di aver colpito il bersaglio almeno una volta dopo i tre tiri.

[0.91]

Esercizio

[Tema d'esame del 03/09/2019-C8]
Siano A e B eventi incompatibili. Stabilire se sia vero o falsa la seguente affermazione:

$$P[A] \leq P[\overline{B}]\,.$$

[*vero*]

Esercizio

[Tema d'esame del 15/01/2013-C2]
Due arcieri tirano con l'arco a un medesimo bersaglio. La probabilitá che il primo arciere colpisca il bersaglio é $\frac{9}{10}$, quella del secondo arciere é $\frac{5}{6}$. I due arcieri tirano contemporaneamente. Determinare la probabilitá che solo il secondo arciere colpisca il bersaglio.

$[\frac{1}{12}]$

Esercizio

Se di 100 pezzi prodotti da un macchina, 10 sono controllati dal tecnico A, 16 dal tecnico B e 3 da entrambi. Qual è la probabilità che un pezzo scelto a caso tra i 100 sia stato controllato? Qual è la probabilità che un pezzo scelto a caso tra i 100 non sia stato controllato?

$[\frac{23}{100}, \frac{77}{100}]$

Esercizio

Un dado viene truccato in modo che i numeri dispari abbiano una probabilità doppia di uscire di quelli pari. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

1. $A = \{$ esce il numero 3 $\}$;
2. $B = \{$ su tre lanci esce per tre volte un numero dispari $\}$;
3. $C = \{$ esce un numero primo $\}$;
4. $E = \{$ su tre lanci esce due volte un numero pari e una volta un numero dispari $\}$.

$[\frac{2}{9}, \frac{8}{27}, \frac{5}{9}, \frac{2}{9}]$

Esercizio

Due carte vengono estratte “a caso” da un mazzo di 40 carte.
Calcolare la probabilità che

(a) siano entrambe di fiori;

(b) siano dello stesso seme;

(c) abbiano lo stesso numero o figura;

(d) una sia di fiori e l’altra di quadri;

(e) la prima sia di fiori e la seconda di quadri.

$[\frac{3}{52};\ \frac{3}{13};\ \frac{1}{13};\ \frac{5}{39};\ \frac{5}{78}]$

[tratto da “corso di Statistica” Universitá degli Studi di Cassino e del Lazio Meridionale]

Esercizio

Ad un campione di 300 lavoratori dipendenti è stato chiesto a chi hanno intenzione di destinare il trattamento di fine rapporto. Si definisca l’evento “il lavoratore è impiegato presso un ente pubblico” con A_1 e l’evento “il lavoratore è impiegato presso una azienda privata” con A_2 ; siano ancora B_1 e B_2 gli eventi “il lavoratore affiderà il TFR all’INPS” e “il lavoratore affiderà il TFR ad una società privata (vedi tabella)

	B_1	B_2	*tot*
A_1	94	48	142
A_2	91	67	158
tot	185	115	300

Sulla base delle risposte ottenute, specificare

1. la probabilità che un intervistato lavori nel privato
2. la probabilità che un intervistato abbia destinato il TFR a privati
3. la probabilità che un intervistato abbia destinato il TFR all'INPS oppure che lavori presso un ente pubblico
4. la probabilità che un intervistato affidi il TFR a privati, posto che sia un dipendente pubblico
5. la probabilità che un intervistato affidi il TFR a privati, posto che sia un dipendente privato

$[\frac{158}{300}, \frac{115}{300}, \frac{233}{300}, \frac{48}{142}, \frac{67}{158}]$

[tratto da “Elementi di Termodinamica Statistica” Dip. Scienza dei Materiali - Universitá di Milano Bicocca]

Esercizio

Consideriamo un sistema composto da 4 particelle con spin $s = \frac{1}{2}$, il quale puó essere orientato in posizione *up* ($\uparrow$) o in posizione *down* ($\downarrow$) . Supponiamo che le particelle non interagiscano fra loro (indipendenza).

Siamo interessati a studiare il momento magnetico totale M del sistema, che é dato da

$$M = \mu_0 \left(N_{up} - N_{down} \right)$$

dove N_{up} e N_{down} sono il numero di particelle rispettivamente con spin *up* e spin *down* , e μ_0 é il momento magnetico di ogni singola particella.

E’ prassi esprimere il momento magnetico totale in unitá di μ_0

$$m = \frac{M}{\mu_0} = N_{up} - N_{down}$$

1)	↑ ↑ ↑ ↑	$N_{up}=4$	$N_{down}=0$
2)	↑ ↑ ↑ ↓	$N_{up}=3$	$N_{down}=1$
3)	↑ ↑ ↓ ↑	$N_{up}=3$	$N_{down}=1$
4)	↑ ↓ ↓ ↓	$N_{up}=3$	$N_{down}=1$
5)	↓ ↑ ↑ ↑	$N_{up}=3$	$N_{down}=1$
6)	↑ ↑ ↓ ↓	$N_{up}=2$	$N_{down}=2$
7)	↑ ↓ ↑ ↓	$N_{up}=2$	$N_{down}=2$
8)	↑ ↓ ↓ ↑	$N_{up}=2$	$N_{down}=2$
9)	↓ ↑ ↑ ↓	$N_{up}=2$	$N_{down}=2$
10)	↓ ↑ ↓ ↑	$N_{up}=2$	$N_{down}=2$
11)	↓ ↓ ↑ ↑	$N_{up}=2$	$N_{down}=2$
12)	↑ ↓ ↓ ↓	$N_{up}=1$	$N_{down}=3$
13)	↓ ↑ ↓ ↓	$N_{up}=1$	$N_{down}=3$
14)	↓ ↓ ↑ ↓	$N_{up}=1$	$N_{down}=3$
15)	↓ ↓ ↓ ↑	$N_{up}=1$	$N_{down}=3$
16)	↓ ↓ ↓ ↓	$N_{up}=0$	$N_{down}=4$

Nel caso di 4 particelle, m puó assume solo 5 valori: $m = 0, \pm 2, \pm 4$.

a) Qual é la probabilitá $P(m)$ per ciascuno dei 5 valori?

$[P(0) = \frac{3}{8}, P(\pm 2) = \frac{1}{4}, P(\pm 4) = \frac{1}{16}]$

Esercizio

[Tema d'esame del 18/04/2018-C3]
La popolazione di Mumbai (India) è per il 60% indù, per il 20% musulmana, per il 15% buddista, per il 5% cristiana. Parla inglese il 20% degli indù, il 10% dei musulmani, il 4% dei buddisti, il 4% dei cristiani. Un visitatore incontra in città un uomo che parla inglese. Qual è la probabilità che sia indù?

$[\frac{30}{37}]$

Applicazioni del calcolo combinatorio al calcolo della probabilità

Esercizio

Nell'Ippica, la corsa tris è una corsa dove gli scommettitori devono indovinare i cavalli che giungono al primo, secondo e terzo posto. Se alla partenza vi sono 12 cavalli, calcolare la probabilità di indovinare la sequenza di arrivo?

$[7,58 \times 10^{-4}]$

Esercizio

Al gioco del Lotto qual è la probabilità di fare una cinquina che contenga i numeri 90 e 1?

$[0,0025]$

Esercizio

[Tema d'esame del 29/08/2016-C1]
Qual è la probabilità che lanciando cinque volte una moneta, si ottenga 3 volte testa?

$[0,3125]$

Esercizio

In un lotto di biscotti di 50 confezioni in scatole rigide, si trovano 5 scatole che sono esteriormente uguali alle altre ma che, per errore della macchina confezionatrice, sono vuote. Calcolare la probabilità che, estraendone 6 a caso, senza tener conto dell'ordine di estrazione, fra queste ve ne sono:

1. 2 vuote;
2. nessuna vuota.

$[0,09376;\ 0,51257]$

Esercizio

[Tema d'esame del 19/06/2017-C5]
Lanciando 10 volte un dado non truccato, calcolare la probabilità che appaia 1 per tre volte, 2 per tre volte e 3 per quattro volte.

$[0,69 \times 10^{-4}]$

Esercizio

[Tema d'esame del 28/08/2017-C2]
Siano dati due lotti L_1, contenente 2 pezzi difettosi e 3 pezzi non difettosi ed L_2, contenente 4 pezzi non difettosi e 3 pezzi difettosi. Da L_1 si effettuano 2 estrazioni con reimmissione ottenendo X pezzi non difettosi. Successivamente da L_2 si effettuano 3 estrazioni con reimmissione ottenendo Y pezzi non difettosi. Calcolare la probabilità che almeno uno dei cinque pezzi estratti sia non difettoso.

$[0,987]$

Esercizio

In un sacchetto ci sono dei gettoni sui quali è inciso un numero di due cifre ottenuto combinando due cifre scelte tra $\{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$. Qual è la probabilità che, in una estrazione, esca un numero maggiore di 70?

$[\frac{1}{3}]$

Esercizio

[Tema d'esame del 05/07/2016-C2]
Un corso di probabilità è frequentato da 10 studenti: 6 maschi e 4 femmine. Viene effettuato un esame, e i punteggi degli studenti sono tutti diversi. Se tutte le classifiche si pensano equiprobabili, qual è la probabilità che le quattro studentesse ottengano i punteggi migliori?

$[0,476 \times 10^{-2}]$

Esercizio

Calcolare la probabilitá che in un gruppo di 31 persone almeno 2 festeggino il compleanno lo stesso giorno. E per 57 persone? Generalizzare al caso di N persone.

$$[0,73; 0,99; 1-\frac{364\times(363)\times\cdots\times(365-N+1)}{365^{N-1}}=1-\frac{D_{365,\,N}}{365^{N}}]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 21/03/2016-C4]
In una classe di 16 studenti, 12 sono maschi e 4 sono femmine. Scelti a caso 3 studenti, calcolare la probabilità che siano tutti maschi.

$$[\frac{11}{28}]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 18/04/2018-C2]
In un armadio sono appese 11 magliette, di cui 5 polo, 2 a righe, 4 da calcio. Si scelgono a caso 4 magliette. Qual è la probabilità di scegliere 3 polo ed 1 che non sia polo?

$[\frac{2}{11}]$

Probabilità Condizionata

Esercizio

Sono assegnati gli eventi A e B. Sapendo che $P\left(\bar{A}\right)=\frac{7}{11}$, $P\left(\bar{B}\right)=\frac{6}{11}$, $P(A\cup B)=\frac{7}{11}$. Calcolare $P\left(\bar{A}\cap\bar{B}\right)$, $P(A|B)$, $P(B|A)$, $P\left(\bar{A}|\bar{B}\right)$, $P\left(A|\bar{B}\right)$.

$[\frac{4}{11};\ \frac{2}{5};\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{3}]$

Esempio 1 (tratto da Gerd Gigerenzer, *Quando i numeri ingannano. Imparare a vivere con l'incertezza,*Milano, 2003, Raffaello Cortina Editore)

In una certo paese viene eseguito lo screenig mammografico per il cancro al seno. Supponiamo che per le donne, asintomatiche, tra i 40 e i 50 anni di sapere che la probabilitá che una di loro abbia il cancro al seno é del $0,8\%$. Se una donna ha il cancro al seno, la probabilitá che il suo mammogramma risulti positivo é del 90%;

se non ha il cancro al seno, c'é comunque una probabilitá del 7% che il suo mammogramma sia positivo. Immaginiamo di essere in presenza di una donna con un mammogramma positivo: qual é la probabilitá che abbia effettivamente il cancro?

Risoluzione.

Siano $M = \{malattia\}$ e $Pos = \{mammogramma\ positivo\}$

Sappiamo che $P(M) = 0,008$, $P(Pos|M) = 0,90$, $P(Pos|\bar{M}) = 0,07$

Allora $P(\bar{M}) = 1 - P(M) = 0,992$

$$P(M|Pos) = \frac{P(M) \times P(Pos|M)}{P(M) \times P(Pos|M) + P(\bar{M}) \times P(Pos|\bar{M})} =$$

$$= \frac{0,008 \times 0,90}{0,008 \times 0,90 + 0,992 \times 0,07} = 0,0939 \approx 9,4\%$$

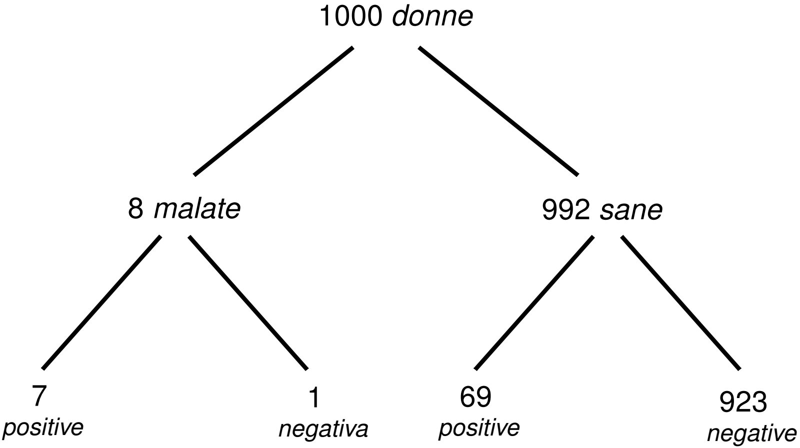
Traduciamo in frequenze il testo proposto

Ogni 1000 donne, 8 hanno il cancro al seno. Fra queste 8 donne con il cancro 7 ($8 \times 0,90 = 7,2$) hanno un mammogramma positivo. Fra le rimanenti 992 che non hanno il cancro, circa 69 ($992 \times 0,07 = 69,4$) hanno ugualmente un mammogramma positivo. Consideriamo un campione casuale di donne che dopo un controllo presentano un mammogramma positivo, quante di loro hanno veramente il cancro? *Risoluzione*.

Fra le 76 ($69 + 7$) donne con un mammogramma positivo, solo 7 hanno il cancro al seno cioé:

$$P(M|Pos) = \frac{7}{76} = 0,092 \approx 9,2\%$$

N.B. La differenza sui millesimi rispetto alla soluzione precedente é dovuta alle approssimazioni


1000 donne
8 malate
992 sane
7
positive
1
negativa
69
positive
923
negative

Esempio 2 (tratto da Gerd Gigerenzer, *Quando i numeri ingannano. Imparare a vivere con l'incertezza,*Milano, 2003, Raffaello Cortina Editore)

Per diagnosticare il cancro colonrettale si usa, insieme ad altri, l'esame della *copremia* per scoprire tracce occulte di sangue nelle feci. Immaginiamo di eseguire uno screening in una certa regione, e supponiamo di sapere che la probabilitá per gli individui asintomatici, sopra i 50 anni, di avere il cancro sia dello $0,3\%$. Se uno ha il cancro colonrettale, c'é una probabilitá del 50% che abbia una copremia positiva; se non ce l'ha, c'é una probabilitá del 3% che abbia comunque una copremia positiva. Immaginiamo di essere in presenza di una persona sopra i 50 anni, asintomatica, con una copremia positiva: qual é la probabilitá che abbia effettivamente il cancro colonrettale?

Siano $M = \{malattia\}$ e $Pos = \{copremia \;\; positiva\}$

Sappiamo che $P(M) = 0,003$ $P(Pos|M) = 0,50$
$P\left(Pos|\bar{M}\right) = 0,03$

Allora $P\left(\bar{M}\right) = 1 - P(M) = 0,997$

$$P(M|Pos) = \frac{P(M) \times P(Pos|M)}{P(M) \times P(Pos|M) + P\left(\bar{M}\right) \times P\left(Pos|\bar{M}\right)} =$$
$$= \frac{0,003 \times 0,50}{0,003 \times 0,50 + 0,997 \times 0,03} = 0,0478 \approx 4,8\%$$

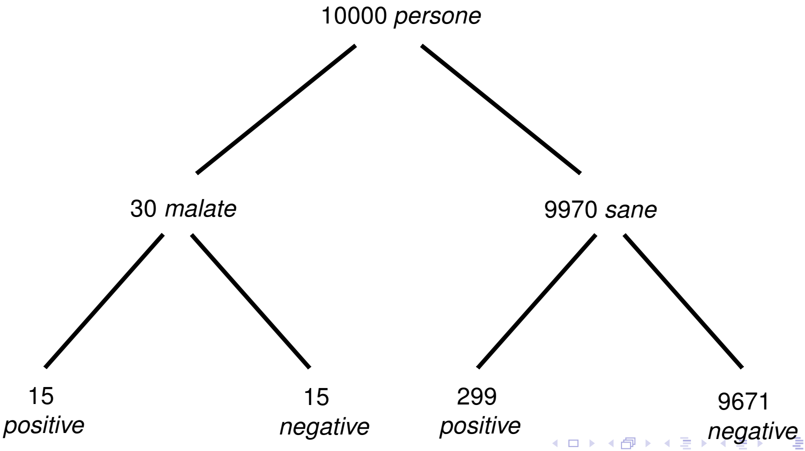
Traduciamo in frequenze il testo proposto

Ogni 10000 persone, 30 hanno il cancro colonrettale. Fra questi 30 individui 15 ($30 \times 0,50 = 15$) hanno una copremia positiva. Fra le rimanenti 9970 persone che non hanno il cancro, circa 299 ($9970 \times 0,03 = 299,1$) hanno ugualmente una copremia positiva. Consideriamo un campione casuale di persone, sopra i 50 anni e asintomatiche, che dopo un controllo presentano una copremia positiva, quante di loro hanno veramente il cancro colonrettale?

Risoluzione.

Fra le 314 $(299 + 15)$ persone con una copremia positiva, solo 15 hanno il cancro colonrettale cioé:

$$P(M|Pos) = \frac{15}{314} = 0,0478 \approx 4,8\%$$



Esercizio

[Tema d'esame del 13/06/2018-C3]
Ad un concorso musicale partecipa il 50% di pianisti, il 30% di violinisti e il 20% di flautisti. Si presenta per la prima volta al suddetto concorso il 10% di pianisti, il 33% di violinisti e il 10% di flautisti. Sapendo che il partecipante scelto NON è al suo primo concorso, calcolare la probabilità che egli sia un flautista.

$[0,2166]$

Esercizio

[Tema d'esame del 28/08/2018-C4]
Dati due eventi A, B, tali che $\mathrm{P}[A] = \dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}[B] = \dfrac{2}{5}$ e $\mathrm{P}[\overline{A \cup B}] = \dfrac{13}{30}$, determinare $\mathrm{P}[\overline{A} \cap B | \overline{A}]$.

$[\frac{7}{20}]$

Esercizio

[Tema d'esame del 03/09/2019-C1]
Ad un primo turno elettorale il polo A ha ottenuto il 45% dei voti ed il polo B ha vinto col 55% dei voti. Si ripetono le elezioni con i medesimi votanti e risulta che il 10% di coloro che avevano votato per A hanno spostato il voto su B, mentre il 20% degli elettori che avevano votato per B hanno spostato il voto su A. Chi ha vinto al secondo turno e con quale percentuale?

$[A\,;51,5\%]$

Esercizio

[Tema d'esame del 15/01/2019-C2]
In un esperimento di laboratorio si pone una cavia davanti a 4 labirinti. Ognuno dei 4 labirinti ha la stessa probabilitá di essere scelto dalla cavia. Da osservazioni precedenti risulta che:

- se la cavia sceglie il labirinto UNO, la probabilità di uscire è $\frac{1}{2}$;
- se la cavia sceglie il labirinto DUE, la probabilità di uscire è $\frac{4}{5}$;
- se la cavia sceglie il labirinto TRE, la probabilità di uscire è $\frac{3}{10}$;
- se la cavia sceglie il labirinto QUATTRO, la probabilità di uscire è $\frac{2}{5}$.

Sapendo che la cavia è uscita da uno dei labirinti, calcolare la probabilità che abbia scelto il labirinto QUATTRO.

$[\frac{1}{5}]$

Esercizio

[Tema d'esame del 17/06/2019-C2]
Si utilizza un prodotto fornito in percentuali uguali da due ditte A e B. È noto che, scelto a caso un esemplare difettoso, la probabilità che esso sia stato fornito dalla ditta A vale 0.25. Sapendo che la produzione del prodotto da parte della ditta A ha un difetto di qualità del 5%, calcolare (in percentuale) il difetto di qualità nella produzione della ditta B.

[15%]

Esercizio

[Tema d'esame del 15/04/2019-C2]
La percentuale di studenti iscritti al primo anno di Ingegneria dell'Informazione che frequenta il corso di Probabilità e Statistica è del 90%. Si suppone che, tra questi studenti, il 90% supererà l'esame. Supponendo inoltre che la percentuale di studenti che non supereranno l'esame sia del 12%, calcolare la percentuale di studenti che non frequentano il corso, tra quelli che si ipotizza non supereranno l'esame.

[25%]

Esercizio

[Tema d'esame del 02/09/2013-C4]
Si lancino due dadi non truccati. Calcolare la probabilità condizionata che almeno uno dei due dadi dia 2 sapendo che i dadi danno due numeri diversi.

$[\frac{1}{3}]$

Esercizio

Si consideri l'esperimento del lancio di tre monete. Calcolare la probabilitá

1. di tre croci, data una croce sulla prima moneta;
2. di tre croci, data almeno una croce.

$[\frac{1}{4};\ \frac{1}{7}]$

Esercizio

[Tema d'esame del 15/01/2018-C4]
Dati due eventi A, B, con $P[A] = \frac{1}{2}$, $P[B|A] = P[A|B] = \frac{1}{4}$, calcolare la probabilità $P[\overline{A}|\overline{B}]$

$[\frac{1}{4}]$

Esercizio

[Tema d'esame del 15/01/2018-C3]
Da un cassetto contenente 5 chiavi, delle quali al massimo una può aprire una serratura, si estraggono in blocco 2 chiavi. Si definiscano gli eventi:

$$H = \{\text{il cassetto contiene la chiave che apre la serratura}\},$$

$$E = \{\text{nessuna delle due chiavi estratte apre la serratura}\}.$$

Sapendo che $P[H] = \frac{2}{3}$, calcolare $P[H|E]$.

$[\frac{6}{11}]$

Esercizio

[Tema d'esame del 08/04/2019-C3 1° Test]
Un autobus di linea effettua il collegamento tra due stazioni A e B seguendo due percorsi alternativi 1 e 2. La frequenza con cui segue il primo percorso è pari a 0.3, quella con cui segue il secondo è pari a 0.7. Un gruppo di pendolari riesce a prendere l'autobus con probabilità pari a 0.25 quando questo percorre il tragitto 1 e con probabilità pari a 0.65 quando percorre il tragitto 2. Sapendo che il gruppo di pendolari non è riuscito a prendere l'autobus, calcolare la probabilità che esso abbia seguito il percorso 1.

$[\frac{45}{94}]$

Esercizio

[Tema d'esame del 08/07/2019-C1]
L'urna A contiene 2 palline bianche e 3 nere; l'urna B ne contiene 4 bianche e 1 nera; l'urna C ne contiene 3 bianche e 4 nere. Scelta a caso un'urna, si estrae una pallina bianca. Calcolare la probabilità che essa provenga dall'urna C.

$[\frac{5}{19}]$

Esercizio

[Tema d'esame del 08/07/2019-C8]
Siano dati tre eventi A, B, C. Gli eventi A e B sono incompatibili. Inoltre $P[A] = P[B]$ e $P[C|A] = P[C|B] = 0.5$. Stabilire se sia vero o falsa la seguente affermazione:

$$P[A|C] = \frac{1}{4}\,.$$

(suggerimento: utilizzare il teorema delle probabilità totali per il calcolo di $P[C]$)

[*falso*]

Esercizio

[Tema d'esame del 05/09/2006-C1]
Un'urna contiene 35 monete con inciso, su entrambe le facce, Testa, 20 monete con inciso, su entrambe le facce, Croce, e 15 monete riportanti i classici simboli Testa e Croce. Si estrae a caso una moneta dall'urna e la si lancia. Sapendo che é uscita Testa, qual é la probabilitá che l'altra faccia riporti il simbolo Testa?

$[\frac{14}{17}]$

Esercizio

[Tema d'esame del 15/01/2019-C5] Dati due eventi A e B tali che

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B|A) = \frac{1}{2}, \quad P(A|B) = \frac{1}{3},$$

calcolare la probabilità $P(A \cup B)$.

$[\frac{2}{3}]$

Esercizio

[Tema d'esame del 12/01/2016-C2]
In una popolazione il 30% degli individui presenta una certa caratteristica A che manca invece ai restanti individui. Sapendo che nel gruppo degli individui con la caratteristica A l'80% presenta anche una caratteristica B, mentre nel gruppo di individui senza la caratteristica A solo il 20% possiede la caratteristica B, determinare la probabilità che un individuo estratto in modo casuale dalla popolazione presenti la caratteristica B.

$[0, 38]$

Esercizio

[Tema d'esame del 10/07/2017-C3]
Siano dati due lotti L_1, contenente 1 pezzo difettoso e 4 pezzi non difettosi ed L_2, contenente 1 pezzo non difettoso e 4 pezzi difettosi. Scelto a caso uno dei due lotti ed estratto un pezzo, calcolare la probabilità che sia stato scelto il lotto L_2, supposto che il pezzo estratto sia non difettoso.

$[\frac{1}{5}]$

Esercizio

[Tema d'esame del 09/06/2015-C2]
La popolazione di Nicosia (Cipro) è per il 60% greca, 20% turca, 15% siriana, 5% egiziana. Dei greci il 20% parla inglese, dei turchi il 10%, dei siriani e degli egiziani il 4%. Un visitatore incontra in città un uomo che parla inglese. Qual è la probabilità che sia greco?

$[0,81081]$

[tratto da “Calcolo delle Probabilità” Politecnico di Milano]

Esercizio

Due sacchi di mele sono apparentemente identici ma il primo contiene 2 mele marce e 8 mele buone mentre il secondo ne contiene 6 marce e 4 buone. Viene scelto a caso un sacco e se ne estrae una mela, la si esamina e, senza inserirla, dallo stesso sacco se ne estrae una seconda.

1. Calcolare la probabilità che la prima mela estratta sia marcia.
2. Sapendo che la prima mela estratta è marcia calcolare la probabilità che provenga dal secondo sacco.
3. Sapendo che la prima mela estratta è marcia calcolare la probabilità che anche la seconda lo sia.

$[0,4;\ 0,75;\ 0,444]$

Esercizio

[Tema d'esame del 25/07/2006-C2]
Siano U_1 ed U_2 due urne contenenti palline. Supponiamo che

- U_1 contenga 60% di palline bianche;
- U_2 contenga 70% di palline bianche;
- U_1 contenga il triplo di palline di U_2.

Poniamo ora tutte le palline delle due urne U_1 e U_2 in una sola urna U ed estraiamo una pallina. Sapendo che la pallina é bianca, qual é la probabilitá che inizialmente appartenesse all'urna U_2

$$\left[\frac{7}{25}\right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 02/07/2018-C2]
Una scatola contiene 6 gessetti colorati e 6 gessetti bianchi. Una seconda scatola ne contiene 6 colorati e 2 bianchi. Si estraggono a caso 2 gessetti dalla prima scatola e si aggiungono nella seconda scatola. Qual è la probabilità di estrarre un gessetto colorato dalla seconda scatola?

$$\left[\frac{7}{10}\right]$$

Esercizio

Si supponga di sapere che $\frac{7}{1000}$ della popolazione di una certa regione soffre di allergia. Si sa che un test effettuato su una persona soggetta ad allergia indica la presenza della malattia con probabilità dello 0.9, mentre lo stesso test effettuato su soggetti sani ha una probabilitá di $\frac{1}{1000}$ di indicare erroneamente la presenza di una malattia. Scegliendo a caso una persona, il test mostra la presenza di una allergia:qual è la probabilità che il soggetto sottoposto a test sia veramente allergico?

$[0,8638]$

Esercizio

[Tema d'esame del 02/09/2013-E2]
Tre tiratori sparano un colpo ciascuno sul medesimo bersaglio con probabilità di colpirlo pari a:

$$P[T_1] = \frac{1}{2}\,, \quad P[T_2] = \frac{1}{3}\,, \quad P[T_3] = \frac{1}{6}\,,$$

Si chiede di:

1. calcolare la probabilità che il bersaglio venga colpito;
2. calcolare la probabilità che il bersaglio venga colpito dal primo tiratore, sapendo che il bersaglio è stato colpito;
3. calcolare la probabilità che il bersaglio venga colpito SOLO dal primo tiratore;
4. calcolare la probabilità che il bersaglio venga colpito dal secondo tiratore, ma non dal terzo.

$[\frac{13}{18};\ \frac{9}{13};\ \frac{5}{18};\ \frac{5}{18};]$

Esercizio

I tre macchinari industriali 1, 2, 3 producono gli stessi componenti elettronici. La produzione giornaliera é stata la seguente: 800 pezzi per il macchinario 1; 600 pezzi per il macchinario 2; 400 pezzi per il macchinario 3. Sono stati individuati dei pezzi difettosi prodotti dai tre macchinari: il 5 per cento per il macchinario 1, il 4 per cento per il macchinario 2, il 2 per cento per il macchinario 3. I pezzi vengono confezionati in scatole contenenti 100 pezzi ciascuna, provenienti da uno stesso macchinario e in quella giornata sono state confezionate 18 scatole. Da una delle 18 scatole è stato scelto un pezzo ed è risultato difettoso. Qual è la probabilità che il pezzo sia stato prodotto dal macchinario 2?

$[\frac{1}{3}]$

Esercizio

Sono assegnate due urne che contengono palline colorate, l'urna A_1 contiene 1 pallina bianca, 2 palline nere e 3 palline verdi; l'urna A_2 contiene 3 palline bianche, 1 nera e 2 palline verdi. Si lancia un dado e se la faccia in alto presenta il numero 3 o 4 si estrae una pallina dall'urna A_1, altrimenti si estrae una pallina dall'urna A_2. Sapendo che la pallina estratta è verde, qual è la probabilitá che sia stata estratta dall'urna A_1? Se invece la pallina è bianca, qual è la probabilità che sia stata estratta dall'urna A_2?

$[\frac{3}{7};\ \frac{6}{7}]$

Esercizio

I pezzi prodotti da una certa ditta possono presentare due tipi di difetti con percentuali del 5 per cento per il difetto 1 e del 7 per cento per il difetto 2. Si assuma che i due tipi di difetti siano indipendenti poichè avvengono in momenti diversi della produzione.

1. Determinare la probabilitá che un pezzo presenti entrambi i difetti;
2. determinare la probabilitá che un pezzo sia difettoso;
3. determinare la probabilitá che un pezzo presenti il difetto 1, sapendo a priori che è difettoso;
4. determinare la probabilitá che un pezzo presenti uno solo dei due difetti, sapendo a priori che è difettoso.

$[0,0035;\ 0,1165;\ 0,43;\ 0,97]$

Esercizi proposti

Esercizio

[Tema d'esame del 11/04/2006-C2]
Su 3300 iscritti al primo anno della Facoltá di Ingegneria in un dato anno accademico; 1584 provengono dal Liceo scientifico, 990 dall'Istituto Tecnico Industriale e i rimanenti da altre scuole. Si sono iscritti al corso di Ingegneria Meccanica l'11 per cento degli studenti in possesso di maturitá scientifica, il 7 per cento degli studenti in possesso di diploma di Perito Industriale e l'8 per cento degli studenti provenienti da altre scuole. Scelto a caso uno studente iscritto al primo anno di corso di Ingegneria Meccanica. Qual è la probabilitá che egli sia in possesso della maturità scientifica?

$[0,5777]$

Esercizio

[Tema d'esame del 04/07/2006-E2]

Una fabbrica produce articoli che hanno probabilitá $\frac{1}{10}$ di essere difettosi. Ogni articolo viene controllato separatamente da due ispettori (i controlli sono indipendenti). Un pezzo viene scartato nel caso in cui almeno un ispettore vi trovi un difetto. Il primo ispettore scarta

- un pezzo difettoso con probabilitá $\frac{3}{4}$,
- un pezzo buono con probabilitá $\frac{1}{20}$.

L'altro ispettore decide di scartare

- un pezzo difettoso con probabilitá $\frac{1}{2}$,
- un pezzo buono con probabilitá $\frac{1}{2}$.

Si chiede di calcolare:

(a) la probabilitá che il primo ispettore scarti il pezzo, sapendo che é difettoso;
(b) la probabilitá che il secondo ispettore scarti il pezzo, sapendo che é buono;
(c) la probabilitá che il pezzo sia rifiutato dal primo ispettore;
(d) la probabilitá che il pezzo sia rifiutato dal secondo ispettore;
(e) la probabilitá che il pezzo sia rifiutato;
(f) la probabilitá che il pezzo sia accettato da entrambi, sapendo che il pezzo é difettoso.

$[\frac{3}{4};\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{25};\ \frac{1}{2};\ \frac{14}{25};\ \frac{1}{8}]$

Esercizio

La percentuale di maschi americani che non fuma le sigarette è del 72 per cento, quelli che non fumano il sigaro sono il 93 per cento, quelli che fumano entrambi sono il 5 per cento. Qual è la probabilità che un maschio americano non fumi nè le sigarette nè il sigaro?

$[0, 7]$

Esercizio

La probabilità che Tizio vinca una partita di Tennis contro Caio è valutata pari al 35 per cento. Se Tizio e Caio giocano 5 partite, qual è la probabilità che Tizio vinca almeno una partita?

$[0, 88397]$

Esercizio

Se il figlio maggiore di una coppia con gli occhi castani ha gli occhi azzurri, qual è la probabilità che anche gli altri quattro figli abbiano gli occhi azzurri (non ci sono gemelli) ?

$[0,0039]$

Esercizio

Qual è la probabilità di fare tredici al gioco del Totocalcio?

$[6,27 \times 10^{-7}]$

Esercizio

Nel gioco del Poker, si distribuiscono, a ciascun giocatore 5 carte estratte da un mazzo di 32. Qual è la probabilità di avere un poker di assi (4 assi e una carta qualsiasi)?

$[1,39 \times 10^{-4}]$