CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

Il concetto di probabilità nasce nel Rinascimento con lo studio dei codici segreti e si sviluppa in modo sistematico nel 17° secolo con i giochi d'azzardo.

Il calcolo delle probabilità è lo studio delle proprietà quantitative (come la frequenza) che possono essere osservate per quegli eventi il cui verificarsi o meno (in seguito ad osservazioni o prove) non è prevedibile in modo deterministico.

Tali eventi vengono detti casuali o aleatori.

Matematicamente la probabilità viene descritta mediante una quantità scalare che caratterizza la frequenza di ricorrenza di un dato evento al ripetersi delle prove.

TEORIA CLASSICA O "A PRIORI"

Se l'esito delle prove può essere descritto da un numero finito n di casi possibili, allora la probabilità p di uno di tali casi viene definita "a priori" come:

$$p = \frac{f}{n} \in [0, 1]$$

dove f rappresenta il numero dei casi favorevoli.

Laplace: "la probabilità di un evento è il rapporto tra numero di casi favorevoli e numero di casi possibili"

Esempi

- lancio ripetuto di un dado (non truccato)

presenta $m=6$ casi ugualmente possibili e mutuamente esclusivi.

- probabilità che esca un numero pari:

$f=3$ (2, 4, 6) $\quad p=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

- probabilità che esca il numero 5:

$f=1$ $\quad p=\frac{1}{6}$

- lancio di due dadi (non truccati)

presenta $m=6^2=36$ casi possibili:

$$\begin{pmatrix} (1,1) & \cdots & (1,6) \\ \vdots & & \vdots \\ (6,1) & \cdots & (6,6) \end{pmatrix}$$

matrice 6x6.

- probabilità che esca un doppio 6:

$f=1$ $\quad p=\frac{1}{36}$

- probabilità di ottenere 5 dalla loro somma:

$f=4$ (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) $\quad p=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

- estrazione di una carta da un mazzo di carte francesi

presenta $m=52$ casi ugualmente possibili, mutuamente esclusivi.

- probabilità che esca una carta di fiori:

$f=13$ $\quad p=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$

- probabilità che esca un asso:

$f=4$ $\quad p=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$

- probabilità che esca un asso o una carta di fiori:

$f = 4 + 13 - 1 = 16$ $\qquad p = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$

asso contato due volte

- probabilità che non esca nè asso, nè una carta di fiori:

$f = 52 - 16 = 36$ $\qquad p = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}$

- lancio di una moneta

testa (T) croce (C)

- se il lancio viene ripetuto 2 volte presenta 4 casi ugualmente possibili e mutuamente esclusivi. $n = 2^2 = 4$

$$\begin{pmatrix} TT & TC \\ CT & CC \end{pmatrix}$$

- probabilità di ottenere due teste

$f = 1$ $\qquad p = \frac{1}{4}$

- se il lancio viene ripetuto k volte, i casi possibili sono 2^k.

- probabilità che escano tutte T o tutte C

$f = 2$ $\qquad p = \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$

DIFETTI DEL METODO "A PRIORI"

- occorre supporre che gli eventi possibili siano in numero finito.
- occorre supporre che gli eventi siano mutuamente esclusivi o incompatibili.
- occorre supporre che gli eventi siano tutti ugualmente possibili (equiprobabili).

Il primo problema si supera introducendo la definizione di probabilità geometrica, che rappresenta un'estensione di quella classica.
Il secondo e il terzo possono essere superati solo cambiando teoria, passando alla teoria empirica o frequentista.

TEORIA FREQUENTISTA O EMPIRICA

È necessario concepire una serie di esperimenti o prove che avvengano tutte in condizioni "abbastanza" uniformi.
In tal caso è possibile postulare l'esistenza di un numero p, detto probabilità dell'evento, e approssimarlo con la frequenza relativa con la quale le prove ripetute soddisfano l'evento.
La probabilità di un evento viene definita come il limite a cui tende la frequenza relativa di successo all'aumentare del numero delle prove.

$$p = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

dove n è il numero delle prove, n_A è il numero delle volte che si presenta un certo evento A.

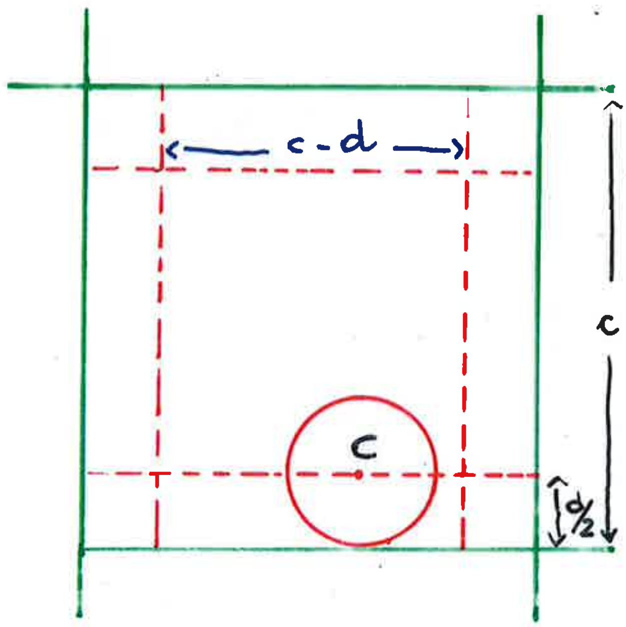
Quindi non bisogna specificare l'equiprobabilità e l'incompatibilità.

DIFETTO

- si applica ad esperimenti ripetibili per i quali il limite per $n \to \infty$ abbia significato.

TEORIA GEOMETRICA

La def. secondo la teoria classica non si applica al gioco del franc-carreau: lancio di una moneta su un pavimento a piastrelle quadrate. Si scommette se la moneta cada all'interno di un'unica piastrella oppure a cavallo di 1, 2, 3, 4 piastrelle.



lato piastrella = c cm

moneta diametro = d cm

- casi favorevoli: quelli in cui la moneta ha il centro che sta internamente alla piastrella ⇒ il centro C ∈ quadrato di lato c - d.
- casi possibili: quelli in cui la moneta ha il centro che cade in qlq pto della piastrella.

⇒ n° casi favorevoli e n° casi possibili sono INFINITI.

Non si possono contare, ma misurare utilizzando l'area occupata dai punti-evento: (centro).

$$p = \frac{(c-d)^2}{c^2}$$ PROBABILITÀ DI FARE FRANC-CARREAU

La probabilità di non riuscirci è

$$p^* = 1 - p$$

Perchè il gioco sia equo $p = p^*$.

$$1-\frac{(c-d)^2}{c^2}=\frac{(c-d)^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow \quad c^2=2(c-d)^2 \Rightarrow \left(\frac{c}{d}\right)^2=2\left(\frac{c}{d}-1\right)^2 \Rightarrow \frac{c}{d}=\sqrt{2}\left(\frac{c}{d}-1\right)$$

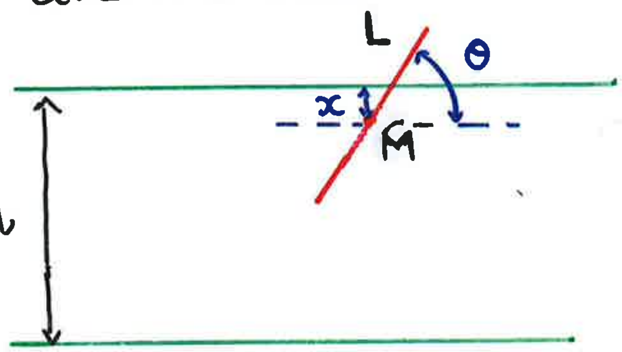
$$\frac{c}{d}(1-\sqrt{2})=-\sqrt{2} \qquad \frac{c}{d}=\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)}\frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}(1+\sqrt{2})=2+\sqrt{2}$$

$$=3{,}4142$$

BUFFON: il lato della piastrella deve essere circa 3 volte e mezzo più grande del diametro della moneta.

AGO di Buffon: si lancia un ago lungo L sul pavimento a parquet a listerelle parallele poste a distanza $d>L$. Calcolare la probabilità che cadendo l'ago intersechi una delle scanalature.

Non è sufficiente conoscere la distanza del pto medio dell'ago dalla scanalatura, ma anche la sua inclinazione θ rispetto alla medesima.



$M:(x,\theta)$ con $0<x<\frac{d}{2}$ e $0<\theta<\pi/2$

$\Rightarrow M\in$ Rettangolo di lati $\frac{d}{2},\frac{\pi}{2}$.

Poiché l'ago deve intersecare la scanalatura, fissato θ:

$$0\leq x\leq \frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta \qquad (1)$$

- casi favorevoli: area della regione che soddisfa (1) limite superiore
- casi possibili: area del rettangolo.

$$p = \frac{\frac{L}{2}}{\frac{\pi d}{4}} = \frac{2L}{\pi d}$$

Se $L = d \Rightarrow p = \frac{2}{\pi}$.

Con il computer si può simulare una serie di lanci dell'ago e tale metodo, detto di Montecarlo, può essere usato per dare una misura approssimata di π.

Poiché le regole e i metodi di calcolo nelle diverse teorie che abbiamo esaminato non differiscono fra loro, è possibile seguire l'impostazione dovuta a A.N. KOLMOGOROV (1933), fondatore della TEORIA ASSIOMATICA della probabilità.

Il linguaggio utilizzato è quello della TEORIA DEGLI INSIEMI.

SPAZIO CAMPIONE ED EVENTI

DEFINIZIONE: Lo **SPAZIO CAMPIONE**, indicato con Ω, è la totalità di tutti i possibili risultati di un esperimento concettuale.

Se lo spazio campione ha un numero finito di elementi, tali elementi si possono elencare separati da una virgola e racchiuderli tra parentesi $\{ , \}$.

Se lo spazio campione ha un numero infinito di elementi, può essere descritto attraverso un'affermazione o una regola.

$$\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

DEFINIZIONE: Un **EVENTO** è un sottoinsieme dello spazio campione e si indica con le lettere maiuscole $A, B, C, \dots$

DEFINIZIONE: Ω è detto **EVENTO CERTO**.

DEFINIZIONE: ϕ è detto **EVENTO IMPOSSIBILE**.

DEFINIZIONE: il **COMPLEMENTARE** di un evento A rispetto ad Ω è il sottoinsieme di tutti gli elementi di Ω che non sono contenuti in A e viene indicato con $\bar{A}$.

Esempi

- lancio del dado

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$card(\Omega) = n = 6$

esce un numero pari è un evento $\Rightarrow A = \{2, 4, 6\}$

- lancio di tre monete

$\Omega = \{TTT, TTC, TCT, CTT, TCC, CTC, CCT, CCC\}$

escono due teste e una croce è un evento $\Rightarrow A = \{TTC, TCT, CTT\}$

- vita di una lampadina

$\Omega = \{t : t \geq 0\}$ t misurato in ore.

la lampadina si brucia prima 300 ore è un evento $\Rightarrow$

$A = \{t : 0 \leq t < 300\}$

OPERAZIONI CON GLI EVENTI

DEFINIZIONE: Se $A, B \subset \Omega$ sono due eventi dello stesso spazio campione, l'INTERSEZIONE di A e B, $A \cap B$ è l'evento che contiene tutti gli elementi comuni sia ad A che a B.

DEFINIZIONE: Se $A, B \subset \Omega$ sono due eventi di Ω che non hanno elementi in comune, cioè $A \cap B = \phi$, i due eventi A e B si dicono DISGIUNTI o MUTUAMENTE ESCLUSIVI o INCOMPATIBILI.

DEFINIZIONE: Se $A, B \subset \Omega$ sono due eventi di Ω, l'UNIONE di A e B, $A \cup B$ è l'evento che contiene tutti gli elementi che appartengono ad A o a B.

La relazione tra gli eventi e il corrispondente spazio campione può essere illustrata graficamente attraverso i DIAGRAMMI DI VENN, dove Ω è rappresentato da un rettangolo e gli eventi da curve chiuse in Ω.

vedi Appendice 1 _ Teoria degli insiemi (cenni).

In molti casi, per risolvere un problema di calcolo delle probabilità è sufficiente contare il numero di punti o elementi nello spazio campione, senza doverli elencare uno ad uno.
Il principio fondamentale dell'enumerazione o conteggio, spesso indicato come regola moltiplicativa, così come la conoscenza dello spazio campione che contiene tutti i possibili ordinamenti di un gruppo di oggetti, detti permutazioni, oppure la conoscenza del numero dei possibili sottoinsiemi o classi in cui è possibile suddividere l'insieme originale, considerando l'ordine non rilevante, chiamate combinazioni, sono argomenti del CALCOLO COMBINATORIO.

Vedi Appendice 2_ Calcolo combinatorio (cenni).

PROBABILITÀ DI UN EVENTO

Non siamo interessati agli eventi, ma alla probabilità che uno di questi eventi si verifichi o meno.
L'impostazione assiomatica parte dal concetto di σ-algebra o classe additiva.
La probabilità viene vista come una misura, cioè come una funzione che associa ad ogni sottoinsieme di Ω un numero reale non negativo, tale che la somma delle probabilità di tutti gli eventi sia uguale ad 1.

Se la cardinalità di Ω è finita, $= n$, l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi, detto insieme delle parti, ha cardinalità 2^n.
Se Ω ha la cardinalità del continuo, il suo insieme delle parti è "troppo grande" perché su di esso si possa definire una misura.

Si considerano perciò i soli sottoinsiemi di Ω che costituiscono un insieme non vuoto $\mathcal{A}$ (classe additiva) tale che:

- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$
- $\forall i \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$

Una classe additiva è quindi un sottoinsieme dell'insieme delle parti di Ω che risulta chiuso rispetto alle operazioni di complemento e di unione numerabile.
Inoltre, per le leggi di De Morgan (vedi appendice 1).

- $\forall i \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bar{A}_i} \in \mathcal{A}$.

ASSIOMI DELLA PROBABILITÀ

DEFINIZIONE: Dati uno spazio campione Ω e una classe additiva (σ-algebra) $\mathcal{A}$ di eventi su Ω, una funzione

$$P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$$

è detta **FUNZIONE DI PROBABILITÀ** se valgono i seguenti assiomi:

A1) $\forall A \in \mathcal{A} \quad P[A] \geq 0$

A2) $P[\Omega] = 1$

A3) $\forall$ successione $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$ di eventi a due a due disgiunti (cioè $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j \quad i \neq j$) tali che $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ si ha:

$$P\left[\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right] = \sum_{i \in \mathbb{N}} P[A_i]$$

La funzione P è una funzione d'insieme perché gli elementi delle funzione sono insiemi di punti anziché punti singoli.
La terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ è detta SPAZIO DI PROBABILITÀ.
Come conseguenza degli assiomi è possibile verificare le seguenti:

PROPRIETÀ DI $P[\cdot]$

1) $P[\phi] = 0$

2) se $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{A}$, a due a due disgiunti

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right] = \sum_{i=1}^{m} P[A_i]$$

3) $\forall A \in \mathcal{A} \quad P[\bar{A}] = 1 - P[A]$

$\Omega = A \cup \bar{A}$, $A \cap \bar{A} = \phi$

4) se $A, B \in \mathcal{A}$

$$P[A] = P[A \cap B] + P[A \cap \bar{B}]$$

$$P[A - B] = P[A \cap \bar{B}] = P[A] - P[A \cap B]$$

$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$, $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \phi$

5) se $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subseteq B$

$$P[A] \leq P[B]$$

6) se $A, B \in \mathcal{A}$

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

REGOLA DI ADDIZIONE

7) se $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{A}$

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{m} P[A_i]$$

OSSERVAZIONE

Questa definizione assiomatica di probabilità ci dice quali funzioni di insieme possono essere chiamate funzioni di probabilità, ma non dice quale valore la funzione $P[\circ]$ attribuisce ad un dato evento.

Sia $\Omega = \{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ spazio campione. Un sottoinsieme $A_i = \{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ è detto **EVENTO SEMPLICE** o **ELEMENTARE**.

SPAZI CAMPIONARI FINITI

Se Ω è costituito da un numero finito di elementi distinti cioè $\Omega = \{e_1, \dots, e_m\}$ è **FINITO** allora:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} \{e_i\} \quad e \quad \{e_i\} \cap \{e_j\} = \phi \quad \forall i, j \quad i \neq j$$

e si ha:

- $\forall A \in \mathcal{A} \quad P[A] = \sum_{e_i \in A} P[\{e_i\}]$
- $P[\{e_i\}] = p_i \quad i = 1, \dots, m \quad : \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$

Se i punti dello spazio campione sono **EQUIPROBABILI** allora:

- $P[\{e_i\}] = p_i = \frac{1}{m} \quad i = 1, \dots, m$
- $\forall A \in \mathcal{A} \quad P[A] = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{card(A)}{m}$

e la funzione di probabilità P è detta **UNIFORME**.

Esempi

- **lancio di 2 dadi**

$$\Omega = \{(i, j) : i = 1, \dots, 6 ; j = 1, \dots, 6\}$$

$$card(\Omega) = 6^2 = 36$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 21 & \cdot & & & 25 & \cdot \\ 31 & \cdot & & 34 & & \cdot \\ 41 & \cdot & 43 & & & \cdot \\ 51 & 52 & & & & \cdot \\ 61 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 66 \end{pmatrix}$$

$\{e_i\} = (i, j)$ evento elementare

$P[\{e_i\}] = \frac{1}{36}$ dadi non truccati

evento esce 7 come punteggio.

$$A_7 = \{(1,6);(6,1);(2,5);(5,2);(3,4);(4,3)\}$$

$$card(A_7) = 6$$

$$P[A_7] = \frac{card(A_7)}{card(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

- **lancio di un dado truccato**

La probabilità che esca la faccia A_j $j = 1, \dots, 6$ è direttamente proporzionale al numero j della faccia.
Qual è la probabilità di ottenere una faccia col numero pari?

Sia $P[A_j] = \alpha j$ α coeff. di proporzionalità

Determiniamo il valore di α.

$$\sum_{J=1}^{6} P[A_J] = \alpha \sum_{J=1}^{6} J = \alpha \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = 21\alpha \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

poiché $\sum_{J=1}^{6} P[A_J] = 1$ allora $\alpha = \frac{1}{21}$

$$P[A_2] + P[A_4] + P[A_6] = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{4}{7}.$$

la probabilità di ottenere una faccia col numero dispari è $\frac{3}{7}$.

Pertanto in presenza di spazi campionari finiti il calcolo della probabilità di un evento si riduce ad un problema di conteggio del numero degli elementi dell'evento.

Tuttavia, se la cardinalità di Ω, anche se finita, è molto grande sarà necessario utilizzare gli strumenti del calcolo combinatorio.

Esempio

Un giocatore di poker ha in mano 5 carte. Calcolare la probabilità che abbia 2 assi e 3 jack.

- il numero di modi in cui posso ottenere 2 assi da 4 carte è:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

- il numero di modi in cui posso ottenere 3 jack a 4 carte è:

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$$

Allora per la regola di enumerazione ci sono $n = (6)\cdot(4) = 24$ mani di carte con 2 assi e 3 jack.

- Nel poker il numero totale di mani da 5 carte, tutte ugualmente, probabili è:

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!\,47!} = 2.598'960$$

quindi

$$p = \frac{24}{2'598'960} = 0.9 \cdot 10^{-5}.$$

Esercizi

1) I pezzi prodotti da una certa macchina possono avere 2 tipi di difetti D_1, D_2.

Si sa:

$P[D_1] = 0.1$ presenza del primo difetto

$P[\bar{D}_2] = 0.8$ assenza del secondo difetto

$P[D_1 \cap D_2] = 0.01$ presenza di entrambi i difetti

Calcolare la probabilità che il pezzo scelto non abbia alcun difetto.

Devo cioè calcolare $P[\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2]$.

$P[\bar{D}_1] = 0.9$; $P[D_2] = 0.2$

Per la regola di addizione

$$P[D_1 \cup D_2] = P[D_1] + P[D_2] - P[D_1 \cap D_2]$$

$$= 0.1 + 0.2 - 0.01 = 0.29$$

Legge di De Morgan

$$P[\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2] = P[\overline{D_1 \cup D_2}] = 1 - P[D_1 \cup D_2]$$

$$= 1 - 0.29$$

$$= 0.71$$

2) Lancio di un dado per 3 volte

Calcolare la probabilità di ottenere ALMENO ($\neq$ esattamente!) 2 numeri uguali

$\Omega = \{1, \dots, 6\}$ per 1° lancio

casi possibili $= 6^3 = 216$

casi favorevoli $= ?$

1) $i\,i\,j$ $\quad j = 1, \dots, 6 \quad i = 1, \dots, 6 \quad 6 \times 6 = 36$

2) $i\,j\,i$ $\quad$ " $\quad$ " $\quad$ "

3) $j\,i\,i$ $\quad$ " $\quad$ " $\quad$ "

$\Rightarrow$ totale $= 36 + 36 + 36 = 108$

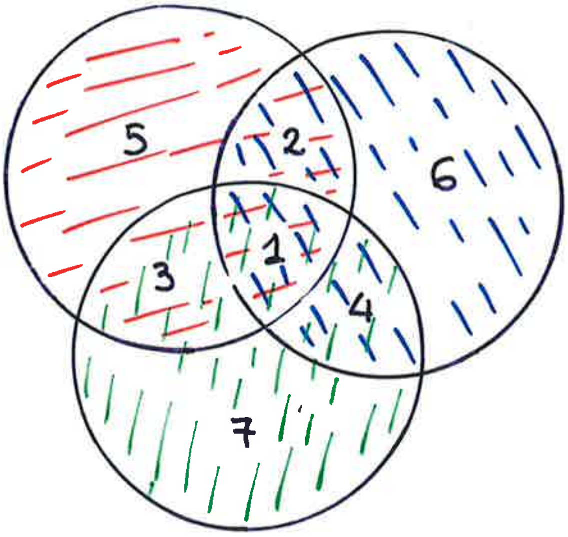
$\Rightarrow p = \dfrac{108}{216} = \dfrac{1}{2}$ non va bene!

Il caso $i\,i\,j$ con $j = i$ viene contato in 2) e in 3)

perciò totale $= 36 + 30 + 30 = 96$

$\Rightarrow p = \dfrac{96}{216} = \dfrac{4}{9}$ ok!

3) Calcolare la probabilità dell'unione di tre eventi, A, B, C, cioè $P[A \cup B \cup C]$.



$$P[A \cup B \cup C] = P[(A \cup B) \cup C] = P[(A \cup B)] + P[C] - P[(A \cup B) \cap C]$$

ma

$$P[(A \cup B) \cap C] = P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]$$

$$= P[A \cap C] + P[B \cap C] - P[A \cap B \cap C]$$

Perciò

$$P[A \cup B \cup C] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] + P[C] - P[A \cap C] - P[B \cap C] + P[A \cap B \cap C]$$

$$= P[A] + P[B] + P[C] - P[A \cap B] - P[A \cap C] - P[B \cap C] + P[A \cap B \cap C]$$

I problemi del Cavalier de Méré

(giocatore d'azzardo)
sottoposti a B. Pascal (1623-1662)

1. Trovare il più piccolo numero intero n tale che lanciando n volte 1 DADO, la probabilità di avere **almeno** un 6 sia maggiore di $1/2$;

2. Trovare il più piccolo numero intero m tale che lanciando m volte 2 DADI, la probabilità di avere **almeno** un $(6,6)$ sia maggiore di $1/2$.

1. In un singolo lancio

A = "fare 6"

$$P[A] = \frac{1}{6}, \quad P[\bar{A}] = \frac{5}{6}$$

B = almeno un 6 in n lanci

$\bar{B}$ = nessun 6 in n lanci

$$P[\bar{B}] = \underbrace{\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{5}{6}}_{n \text{ volte}} = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$P[B] = 1 - P[\bar{B}] = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Trovare n : $P[B] > \frac{1}{2}$.

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{1}{2}$$

$m=1 \quad \left(\frac{5}{6}\right)^1 = 0{,}8\overline{3}$

$m=2 \quad \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0{,}694$

$m=3 \quad \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0{,}578$

$m=4 \quad \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cong 0{,}482$

$\Rightarrow P[B]\Big|_{m=4} \cong 0{,}518$

2. In un lancio di 2 dadi

$A =$ fare $(6,6)$

$P[A] = \frac{1}{36}$, $P[\bar{A}] = \frac{35}{36}$

$B =$ almeno un $(6,6)$ in m lanci

$\bar{B} =$ nessun $(6,6)$ in m lanci

$P[\bar{B}] = \left(\frac{35}{36}\right)^m$

$P[B] = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^m$

Trovare m : $P[B] > \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{35}{36}\right)^m < \frac{1}{2}$

⋮

$m = 24 \quad \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \simeq 0.51 \rightarrow P[B] \cong 0.49$

$m = 25 \quad \left(\frac{35}{36}\right)^{25} \simeq 0.4944 \rightarrow P[B] \cong 0.5055$