PROBABILITÀ CONDIZIONATA

È un concetto molto importante poichè in molte applicazioni alla struttura probabilistica vengono imposte determinate restrizioni.
Il concetto di probabilità condizionata permette di rivalutare l'idea di probabilità di un evento alla luce di nuove informazioni, cioè quando un altro evento si è verificato.
Perciò indichiamo col simbolo $P[A|B]$ la probabilità che A si verifichi sapendo che B si è verificato, leggendo semplicemente "probabilità di A dato B".

DEFINIZIONE: Dati due eventi $A, B \in \mathcal{A}$, definiamo PROBABILITÀ CONDIZIONATA DI A DATO B, cioè $P[A|B]$, la quantità scalare:

$$P[A|B] = \begin{cases} \dfrac{P[A \cap B]}{P[B]} & \text{se } P[B] > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

La probabilità condizionata $P[\circ|B]$ con $P[B]>0$ è una funzione di probabilità poichè verifica i 3 assiomi e pertanto per esso valgono le proprietà della probabilità già enunciate.

Esempi

- lancio di 2 monete

Calcolare la probabilità di:
1) avere 2 teste, data una testa sulla 1ª moneta;
2) avere 2 teste, data almeno una testa.

$\Omega = \{TT, TC, CT, CC\}$

$card(\Omega) = n = 4$

Secondo la definizione classica

i) testa sulla 1ª moneta $\Rightarrow \{TT, TC\}$ per cui $P[TT] = \frac{1}{2}$

ii) almeno una testa $\Rightarrow \{TT, TC, CT\}$ per cui $P[TT] = \frac{1}{3}$

Vogliamo ora utilizzare la nozione di prob. condizionata

$A_1 = \{$ avere T sulla 1ª moneta $\}$

$A_2 = \{$ avere T sulla 2ª moneta $\}$

$A_1 \cup A_2 = \{$ avere almeno una T $\}$

$A_1 \cap A_2 = \{$ avere due T $\}$

1) $$P[A_1 \cap A_2 \mid A_1] = \frac{P[(A_1 \cap A_2) \cap A_1]}{P[A_1]} = \frac{P[A_1 \cap A_2]}{P[A_1]} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$$

2) $$P[A_1 \cap A_2 \mid A_1 \cup A_2] = \frac{P[(A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cup A_2)]}{P[A_1 \cup A_2]}$$

$$= \frac{P[A_1 \cap A_2]}{P[A_1 \cup A_2]} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

- lancio di due dadi

Calcolare la probabilità di ottenere 9, ammesso che su un dado esca 3.

$A =$ "ottenere 9" $= \{(3,6); (6,3); (4,5); (5,4)\}$

$B =$ "su un dado esce 3" $= \{(1,3); (3,1); (2,3); (3,2); (3,3); (3,4); (4,3); (3,5); (5,3); (3,6); (6,3)\}$

$\text{card}(A) = 4$; $\text{card}(B) = 11$

(ricorda che $\text{card}(\Omega) = 36$)

$A \cap B = \{(3,6);(6,3)\}$

$\mathrm{card}(A \cap B) = 2$

$$P[A|B) = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{\frac{\mathrm{card}(A \cap B)}{\mathrm{card}(\Omega)}}{\frac{\mathrm{card}(B)}{\mathrm{card}(\Omega)}} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{2}{11}$$

OSSERVAZIONE

Non confondere la probabilità condizionata con le prove ripetute dello stesso esperimento; cioè lanciamo due volte il dado e supponiamo che esca il numero 3. Qual è la probabilità di "ottenere 9" col secondo lancio? La probabilità è $\frac{1}{6}$.

OSSERVAZIONE

Se lo spazio campione Ω è finito e la probabilità è uniforme (pti equiprobabili) allora:

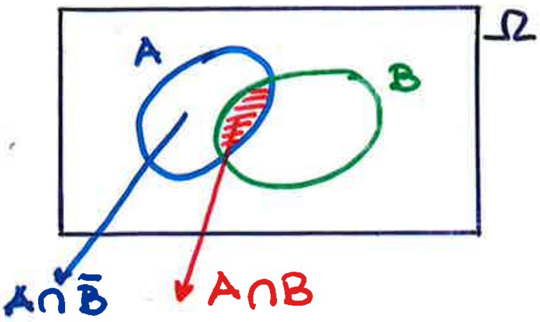
$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{\mathrm{card}(A \cap B)}{\mathrm{card}(B)} \qquad (B \neq \emptyset)$$

OSSERVAZIONE

Dato Ω sp. campione e dati due eventi $A, B \in \mathcal{A}$.

Poiché:

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \quad e \quad (A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \emptyset$$



$P[A] = P[A \cap B] + P[A \cap \bar{B}]$

e anche

$P[A] = P[A|B] \cdot P[B] + P[A|\bar{B}] \cdot (1 - P[B])$.

• lancio di un dado truccato

Il dado è stato modificato in modo che i numeri pari abbiano una probabilità doppia di uscire rispetto ai numeri dispari.

Sia A l'evento di ottenere un quadrato perfetto nel lancio di un dado.

$A = \{1, 4\}$

Se indico con p la prob. di un numero dispari

$P[D] = P[1] + P[3] + P[5] = 3p$

la probabilità di ottenere un numero pari è doppia

$P[P] = P[2] + P[4] + P[6] = 3 \cdot 2p = 6p$

poiché $\Omega = D \cup P$ e $P[\Omega] = 1 \Rightarrow P[D] + P[P] = 1$

$\Rightarrow 3p + 6p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{9}$

Quindi ogni dispari ha $p = \frac{1}{9}$ e ogni pari ha $p = \frac{2}{9}$.

$P[A] = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Ora supponiamo che nel lancio del dado sia uscito un numero > 3, cioè $\{4, 5, 6\}$. Quanto vale ora la probabilità dell'evento A?

Ora $A = \{4\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$ $A \cap B = \{4\}$

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{P[A]}{P[B]}$$

ora $P[A] = \frac{2}{9}$

$$P[B] = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

quindi $P[A|B] = 2/5$.

• volo areoplano

La probabilità che un volo parte in orario è $P[A] = 0.83$.

La probabilità che un volo arrivi in orario è $P[B] = 0.82$

La probabilità che un volo parta ed arrivi in orario è $P[A \cap B] = 0.78$.

Calcolare la probabilità che:

1) l'aereo arrivi in orario, sapendo che è partito in orario
2) l'aereo parta in orario, sapendo che è arrivato in orario
3) l'aereo arrivi in orario, sapendo che NON è partito in orario

1) $$P[B|A] = \frac{P[B \cap A]}{P[A]} = \frac{P[A \cap B]}{P[A]} = \frac{0.78}{0.83} = 0.94$$

2) $$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{0.78}{0.82} = 0.95$$

3) $$P[B|\bar{A}] = \frac{P[B \cap \bar{A}]}{P[\bar{A}]}$$

$$P[\bar{A}] = 1 - P[A] = 1 - 0.83 = 0.17.$$

Poiché $B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$ dove $(B \cap \bar{A}) \cap (B \cap A) = \emptyset$

$$P[B] = P[B \cap A] + P[B \cap \bar{A}]$$

perciò

$$P[B \cap \bar{A}] = P[B] - P[B \cap A] = 0.82 - 0.78 = 0.04$$

quindi

$$P[B|\bar{A}] = \frac{0.04}{0.17} = 0.24$$

IL TEOREMA DELLE PROBABILITÀ TOTALI

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità e $B_1, \dots, B_m$ una collezione finita di eventi di $\mathcal{A}$, a due a due incompatibili, tali che:

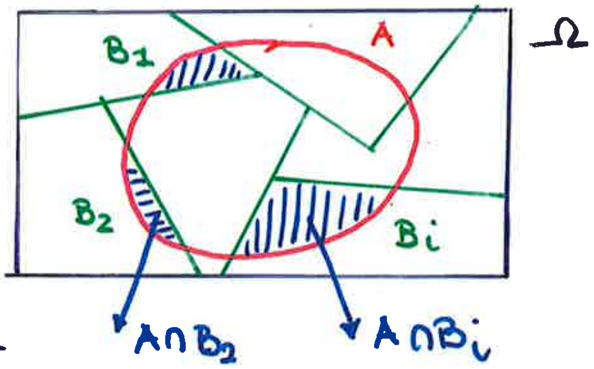
i) $P[B_i] > 0 \quad i = 1, \dots, m$

ii) $\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$

Allora $\forall A \in \mathcal{A}$ si ha:

$$P[A] = \sum_{i=1}^{m} P[A|B_i] P[B_i]$$

Dimostrazione



$A \cap B_1 \subset B_1$

$A \cap B_2 \subset B_2$

$\vdots$

$A \cap B_i \subset B_i$

Poiché $B_1, \dots, B_m$ sono disgiunti a 2 a 2.

$\Rightarrow (A \cap B_1), \dots, (A \cap B_n)$ sono disgiunti a 2 a 2.

Notiamo che:

$$A = \Omega \cap A = \left(\bigcup_{i=1}^{m} B_i \right) \cap A = \bigcup_{i=1}^{m} (A \cap B_i)$$

Applichiamo la probabilità:

$$P[A] = P\left[\bigcup_{i=1}^{m} (A \cap B_i) \right] = \sum_{i=1}^{m} P[A \cap B_i] = \sum_{i=1}^{m} P[A|B_i] P[B_i]$$

incompatibilità

dalla def. di prob. condizionata

PRIMA FORMULA DI BAYES

Una forma equivalente della definizione di probabilità condizionata è la seguente espressione chiamata

REGOLA DI MOLTIPLICAZIONE :

$$P[A \cap B] = P[A|B] \cdot P[B] \quad , \; P[B] > 0$$

Poiché $P[A \cap B] = P[B \cap A]$, vale anche

$$P[B \cap A] = P[B|A] \cdot P[A] \quad , \; P[A] > 0$$

perciò uguagliando le due espressioni si ottiene:

$$P[A|B] = \frac{P[B|A] \cdot P[A]}{P[B]}$$

Esempi

1) Un sacchetto contiene 4 palline bianche 3 palline nere.
Un altro sacchetto contiene 3 palline bianche e 5 palline nere.
Dal 1° sacchetto si estrae una pallina e la si inserisce, senza guardarla, nel 2° sacchetto.
Qual è ora la probabilità che una pallina estratta dal 2° sacchetto sia nera?

1° $< \begin{matrix} 4B \\ 3N \end{matrix}$ 2° $< \begin{matrix} 3B \\ 5N \end{matrix}$ diventa o $\begin{cases} 4B \\ 5N \end{cases}$ o $\begin{cases} 3B \\ 6N \end{cases}$

1°) $P[N_1] = \frac{3}{7}$

2°) $P[N_2] = P[N_2|N_1]\, P[N_1] + P[N_2|B_1] \cdot P[B_1]$ TH. PROB. TOT.

$$= \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{7} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{7} = \frac{18}{63} + \frac{20}{63} = \frac{38}{63}$$

$$= P[N_2 \cap N_1] + P[N_2 \cap B_1]$$

$$= P[N_2 \cap N_1] + P[N_2 \cap \bar{N}_1]$$

② In un impianto 3 macchine B_1, B_2, B_3 assemblano una quantità di prodotti pari rispettivamente al 30%, 45%, 25%.

È noto che le macchine producono pezzi difettosi rispettivamente nella percentuale del 2%, 3%, 2%.

Scelto a caso un pezzo, calcolare la probabilità che sia difettoso.

A = il pezzo è difettoso.

B_1 = pezzo prodotto dalla macchina B_1

B_2 = " " " " B_2

B_3 = " " " " B_3

$P[B_1] = 0{,}3$; $P[B_2] = 0.45$; $P[B_3] = 0.25$.

$P[A|B_1] = 0.02$; $P[A|B_2] = 0.03$; $P[A|B_3] = 0.02$

quindi:

$$P[A] = \sum_{i=1}^{3} P[A|B_i] \cdot P[B_i] \qquad \text{TH. PROB. TOTALI}$$

$$= (0.3)(0.02) + (0.45)\cdot(0.03) + (0.25)\cdot(0.02)$$

$$= 0.006 + 0.0135 + 0.005 = 0.0245.$$

N.B. ipotesi sottointesa: indipendente nella produzione dei pezzi difettosi, per ogni macchina.

③ Un segnale, può essere trasmesso da 2 canali, A e B con la stessa probabilità.

Il canale A trasmette sempre correttamente.

Il canale B trasmette correttamente con probabilità $\frac{3}{4}$.

- Qual è la probabilità di ricevere un segnale corretto?
- Avendo ricevuto un segnale corretto, qual è la probabilità che provenga dal canale B?

A = il segnale proviene dal canale A

B = il segnale proviene dal canale B

C = il segnale è corretto

- $P[C] = P[C|A] \cdot P[A] + P[C|B] \cdot P[B]$ TH. PROB. TOT.

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

- $P[B|C] = \dfrac{P[C|B] \cdot P[B]}{P[C]}$ 1ª FORMULA DI BAYES

$$= \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{8}} = \frac{3}{7}.$$

N.B: l'equiprobabilità nella scelta del canale $\Rightarrow P[A] = P[B] = \frac{1}{2}$

Dato una serie di eventi che ricoprono tutto lo spazio campione (ricoprimento finito) e dato un evento A, ci si può chiedere quale sia la probabilità condizionata di ognuno di questi eventi del ricoprimento, sapendo che si è verificato l'evento A. Non è altro che una generalizzazione della 1ª formula di Bayes.

IL TEOREMA DI BAYES

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità e $B_1, \dots, B_m$ una collezione finita di eventi di $\mathcal{A}$ a due a due incompatibili, tali che:

i) $P[B_i] > 0 \quad i = 1, \dots, m$

ii) $\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$

Allora, $\forall A \in \mathcal{A}$ con $P[A] > 0$ si ha:

$$P[B_i|A] = \frac{P[A|B_i] \cdot P[B_i]}{\sum_{j=1}^{m} P[A|B_j] \cdot P[B_j]}$$

Dimostrazione

E' immediata. Dalla 1ª formula di Bayes si ha:

$$P[B_i|A] = \frac{P[A|B_i]\cdot P[B_i]}{P[A]}$$

e per il teorema delle probabilità totali

$$P[A] = \sum_{j=1}^{m} P[A|B_j]\cdot P[B_j].$$

Esempio

Date 5 urne numerate contenenti ciascuna 10 palline.

Dentro la i-esima urna ci sono i palline difettose.

Scelta un'urna a caso ed estratta una pallina,

- calcolare la probabilità che la pallina sia difettosa
- estratta la pallina e visto che è difettosa, calcolare la probabilità che provenga dall'urna n°5.

1	2	3	4	5
1-9	2-8	3-7	4-6	5-5

Con la def. di probabilità a priori $p=\frac{f}{m}$ si ha immediatamente $p=\frac{15}{50}=\frac{3}{10}$

Vogliamo applicare il teorema delle probabilità totali.

A = pallina difettosa

B_i = i-esima urna

Ogni urna ha la stessa probabilità di essere scelta, quindi

$$P[B_i]=\frac{1}{5} \quad i=1,\dots,5.$$

$$P[A|B_i]=\frac{i}{10}$$

$$P[A] = \sum_{i=1}^{5} P[A|B_i]\cdot P[B_i]$$

$$= \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} \frac{i}{10} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{5} i = \frac{1}{50} \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} = \frac{3}{10}$$

(ricorda che $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$)

- $P[B_5 | A] = \frac{P[A | B_5] \cdot P[B_5]}{P[A]}$ TH. DI BAYES

dove $P[A] = \sum_{i=1}^{5} P[A | B_i] \cdot P[B_i]$

quindi:

$$P[B_5 | A] = \frac{\frac{5}{10} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{3}$$

In generale

$$P[B_k | A] = \frac{\frac{k}{10} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{k}{15} \qquad k = 1, \dots, 5$$

Quindi in termini non condizionati tutti i B_i sono equiprobabili ($P[B_i] = \frac{1}{5}$ $i = 1, .., 5$), condizionati al verificarsi dell'evento A non lo sono più poiché $P[B_i | A] = \frac{i}{15}$.

OSSERVAZIONE

Il teorema delle probabilità totali e il teorema di Bayes sono tra le regole più importanti della teoria della probabilità. Si applicano in quegli esperimenti cosiddetti a più fasi.

OSSERVAZIONE

È possibile estendere la regola di moltiplicazione enunciata per due eventi a situazioni in cui sono presenti più di due eventi.

REGOLA DEL PRODOTTO

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità e $B_1, \dots, B_n$ una collezione finita di eventi di $\mathcal{A}$ tali che:

$$P[B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1}] > 0 .$$

Allora vale:

$$P[B_1 \cap \dots \cap B_n] = P[B_1] \cdot P[B_2 | B_1] \cdot P[B_3 | B_1 \cap B_2] \cdots$$
$$\cdots P[B_n | B_1 \cap \dots B_{n-1}]$$

(senza dimostrazione)

Esempio

Data un'urna contenente 10 palline, di cui 3 nere e 7 bianche. Estratta una pallina e registratone il colore, la si rimette nell'urna aggiungendone altre due dello stesso colore.

Calcolare la probabilità di estrarre una pallina nera in ognuno dei primi tre tentativi.

B_i = estrazione di una pallina nera all'i-esimo tentativo

$$P[B_1 \cap B_2 \cap B_3] = P[B_1] \cdot P[B_2 | B_1] \cdot P[B_3 | B_1 \cap B_2]$$

$$P[B_1] = \frac{3}{10}$$

aggiungo 2 palline nere $\Rightarrow P[B_2 | B_1] = \frac{5}{12}$

aggiungo 2 palline nere $\rightarrow P[B_3 | B_1 \cap B_2] = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

Quindi

$$P[B_1 \cap B_2 \cap B_3] = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} .$$

Esercizi proposti

① In una scatola ci sono 5 transistor rotti, 10 difettosi cioè inizialmente funzionano, ma poi si rompono, 25 non difettosi e non rotti (cioè buoni).
Scelto a caso un transistor, calcolare la probabilità che esso sia buono, se inizialmente funziona.

$R = 5/7$.

② Riprendendo l'esempio ② dopo il th. delle probabilità totali, dato che il prodotto scelto è difettoso, calcolare la probabilità che sia stato assemblato dal macchinario B_3.

$R = 10/49$

N.B. Dal valore basso ottenuto si può ritenere che probabilmente il pezzo non sia stato assemblato dalla macchina B_3.

③ In una prova a 5 risposte, lo studente conosce la risposta con probabilità $\frac{1}{3}$, indovina la risposta con probabilità $\frac{2}{3}$. Se prova ad indovinare, risponde correttamente con probabilità $\frac{1}{5}$.

Qual è la probabilità condizionata che sapesse la risposta ad una domanda a cui ha risposto correttamente?

$R = 5/7$

④ Un mazzo di carte francesi (52 carte) è suddiviso casualmente in 4 mazzi da 13 carte ciascuno.
Calcolare la probabilità che ci sia un asso in ogni mazzetto.

$R = 0.105$

INDIPENDENZA

Sebbene la probabilità condizionata permetta di modificare la probabilità di un evento alla luce di nuove informazioni, è molto importante anche il concetto di indipendenza tra eventi.
Dati due eventi A, B se il verificarsi di B non ha alcun impatto sulla probabilità di A, allora A e B sono indipendenti.

DEFINIZIONE: Due eventi A, B si dicono **INDIPENDENTI** se

$$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$$

TEOREMA. Le seguenti condizioni sono EQUIVALENTI:

1. $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$
2. Se $P[B] > 0 \Rightarrow P[A|B] = P[A]$.
3. Se $P[A] > 0 \Rightarrow P[B|A] = P[B]$

Dimostrazione

Dire che le 3 proposizioni sono equivalenti significa che $1 \Rightarrow 2$, $2 \Rightarrow 3$, $3 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 2$ $\quad P[A|B] = \dfrac{P[A \cap B]}{P[B]} \overset{1)}{=} \dfrac{P[A] \cdot P[B]}{P[B]} = P[A]$.

$2 \Rightarrow 3$ $\quad P[B|A] \underset{\uparrow \text{Bayes}}{=} \dfrac{P[A|B] \cdot P[B]}{P[A]} \overset{2)}{=} \dfrac{P[A] \cdot P[B]}{P[A]} = P[B]$

$3 \Rightarrow 1$ $\quad P[A \cap B] \underset{\uparrow \text{regola moltiplicazione}}{=} P[B|A] \cdot P[A] \overset{3)}{=} P[B] \cdot P[A]$

- Se A, B sono indipendenti allora sono indipendenti

  A e $\bar{B}$, $\bar{A}$ e B, $\bar{A}$ e $\bar{B}$

Verifichiamo che A e $\bar{B}$ sono indipendenti (gli altri due casi si dimostrano in modo analogo).

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \qquad \text{e} \quad (A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \emptyset$$

$$P[A] = P[A \cap B] + P[A \cap \bar{B}]$$

$\Rightarrow$

$$P[A \cap \bar{B}] = P[A] - P[A \cap B] \underset{\text{indip.}}{=} P[A] - P[A] \cdot P[B]$$

$$= P[A](1 - P[B]) = P[A] \cdot P[\bar{B}]$$

Esempio

- lancio di due dadi

  A ottenere un numero dispari come punteggio

  B ottenere 1 sul primo dado.

  C ottenere 7 come punteggio

Stabilire se A e B, A e C, B e C sono indipendenti.

$\Omega = \{(i,j) : i = 1, \dots, 6 \ ; j = 1, \dots, 6\}$

$\text{card}(\Omega) = 36$

$A = \{(1,2); (2,1); (1,4); (4,1); (1,6); (6,1); (2,3); (3,2); (2,5); (5,2); (3,4); (4,3); (3,6); (6,3); (4,5); (5,4); (5,6); (6,5)\}$

$\text{card}(A) = 18$

$B = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6)\}$

$\text{card}(B) = 6$

$C = \{(1,6); (6,1); (2,5); (5,2); (3,4); (4,3)\}$

$\text{card}(C) = 6$

$$P[A] = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P[B] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P[C] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$A \cap B = \{(1,2);(1,4);(1,6)\}$$

$$card(A \cap B) = 3$$

$$A \cap C = C$$

$$card(A \cap C) = 6$$

$$B \cap C = \{(1,6)\}$$

$$card(B \cap C) = 1$$

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{card(A \cap B)}{card(B)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = P[A]$$

$\Rightarrow$ A e B sono indipendenti

$$P[A|C] = \frac{P[A \cap C]}{P[C]} = \frac{card(A \cap C)}{card(C)} = \frac{6}{6} = 1 \neq P[A]$$

$\Rightarrow$ A e C sono dipendenti

$$P[B|C] = \frac{P[B \cap C]}{P[C]} = \frac{card(B \cap C)}{card(C)} = \frac{1}{6} = P[B]$$

$\rightarrow$ B e C sono indipendenti.

OSSERVAZIONE

Dati tre eventi A, B, C, se A è indipendente da B e da C

$\not\Rightarrow$ A è indipendente da $(B \cap C)$.

Esempio

- lancio di due dadi

A ottenere 7 come punteggio

B ottenere 4 sul primo dado

C ottenere 3 sul secondo dado

$A = \{(1,6); (6,1); (2,5); (5,2); (3,4); (4,3)\}$

$B = \{(4,1); (4,2); (4,3); (4,4); (4,5); (4,6)\}$

$C = \{(1,3); (2,3); (3,3); (4;3); (5,3); (6,3)\}$

$\text{card}(A) = \text{card}(B) = \text{card}(C) = 6$

$\text{card}(\Omega) = 36$

$\Rightarrow P[A] = P[B] = P[C] = \frac{1}{6}$

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{1}{6} = P[A] \quad (A \text{ e } B \text{ indip.})$$

$$P[A|C] = \frac{P[A \cap C]}{P[C]} = \frac{1}{6} = P[A] \quad (A \text{ e } C \text{ indip})$$

$$P[A | B \cap C] = \frac{P[A \cap B \cap C]}{P[B \cap C]} = 1 \neq P[A]$$

quindi A non è indipendente dall'evento $(B \cap C)$. ■

È possibile generalizzare la nozione di eventi indipendenti al caso di 3 o più eventi.

DEFINIZIONE: Tre eventi A, B, C si dicono **INDIPENDENTI** se

$$P[A\cap B\cap C]=P[A]\cdot P[B]\cdot P[C]$$
$$P[A\cap B] = P[A]\cdot P[B]$$
$$P[A\cap C] = P[A]\cdot P[C]$$
$$P[B\cap C] = P[B]\cdot P[C]$$

DEFINIZIONE: Dati m eventi $A_1, \dots, A_m$, essi si dicono **INDIPENDENTI** se

$$P[A_i\cap A_j]=P[A_i]\cdot P[A_j] \quad i\neq j$$

$$P[A_i\cap A_j\cap A_k]=P[A_i]\cdot P[A_j]\cdot P[A_k] \quad \begin{matrix} i\neq j \\ i\neq k \\ j\neq k \end{matrix}$$

$$\vdots$$

$$P\left[\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right]=\prod_{i=1}^{m} P[A_i]$$

OSSERVAZIONE

Eventi incompatibili (o disgiunti o mutuamente esclusivi) **NON** sono eventi indipendenti

Infatti, dati A, B incompatibili $\Rightarrow A\cap B=\emptyset$

$\Rightarrow P[A\cap B]=0$

Se A e B fossero indipendenti $P[A\cap B]=P[A]\cdot P[B]$

Le due espressioni coincidono sse

$P[A]\cdot P[B]=0$ cioè $P[A]=0$ oppure $P[B]=0$

cioè o A oppure B è l'evento impossibile.

- Se tre eventi sono indipendenti, allora ognuno di essi è indipendente da qualunque evento si possa costruire con gli altri due.

Lo verifichiamo con un esempio.

Dati A, B, C indipendenti, proviamo che A è indipendente da $(B \cup C)$.

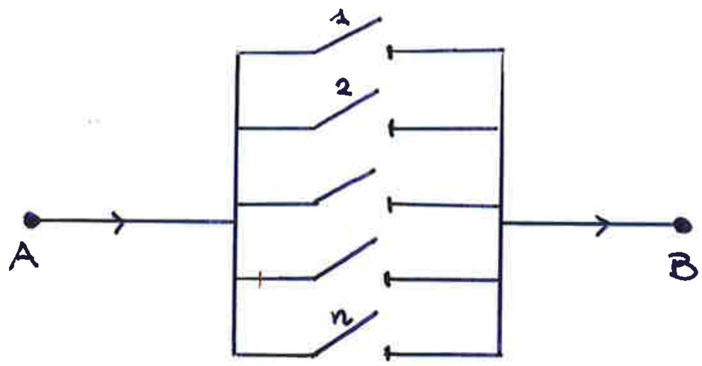
$$
\begin{aligned}
P[A \cap (B \cup C)] &= P[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \\
&= P[A \cap B] + P[A \cap C] - P[A \cap B \cap C] \\
&= P[A] \cdot P[B] + P[A] \cdot P[C] - P[A] \cdot P[B] \cdot P[C] \\
&= P[A] \cdot \{ P[B] + P[C] - P[B] \cdot P[C] \} \\
&= P[A] \cdot \{ P[B] + P[C] - P[B \cap C] \} \\
&= P[A] \cdot P[B \cup C].
\end{aligned}
$$

CIRCUITI IN PARALLELO

Un sistema costituito da n componenti si dice in PARALLELO se funziona fintanto che almeno uno dei componenti funziona.

Sia dato un sistema in parallelo per il quale il j-esimo componente funziona con probabilità p_j, INDIPENDENTEMENTE da tutti gli altri, con $j = 1, \dots, n$.

Qual è la probabilità che il sistema funzioni?



A_j = il j-esimo componente funziona $j = 1, \dots, n$

S = il sistema funziona.

$$P[S] = 1 - P[\bar{S}]$$
$$= 1 - P[\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n]$$

poichè il sistema non funziona se nessun componente funziona.

Poichè i componenti sono indipendenti

$$P[\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n] = P[\bar{A}_1] \cdot P[\bar{A}_2] \cdots P[\bar{A}_n]$$
$$= (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdots (1 - p_n)$$

quindi

$$P[S] = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)$$

CIRCUITI IN SERIE

Un sistema costituito da n componenti si dice in **SERIE** se funziona solo se tutti i suoi componenti funzionano.
Sia dato un sistema in serie per il quale il j-esimo componente funziona con probabilità P_J INDIPENDENTEMENTE da tutti gli altri, con $j = 1, \dots, n$.
Qual è la probabilità che il sistema funzioni?

A_J = il j-esimo componente funziona $j = 1, \dots, n$

S = il sistema funziona

$$P[S] = P[A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n]$$

Poichè i componenti sono indipendenti.

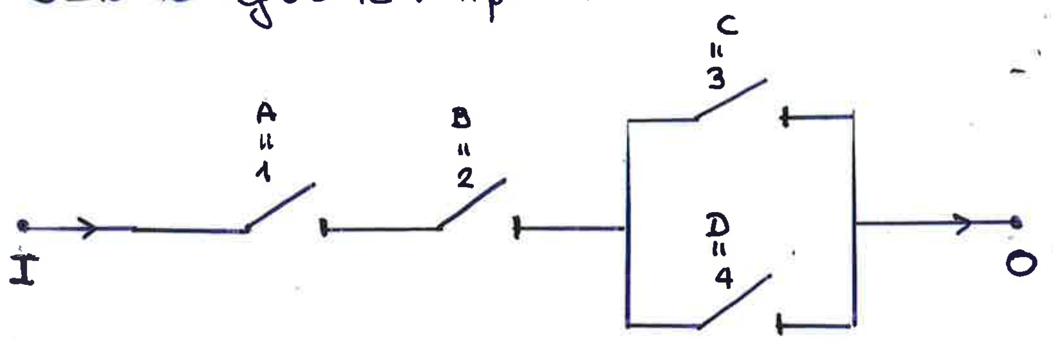
$$P[A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n] = P[A_1] \cdot P[A_2] \cdots P[A_n]$$
$$= P_1 \cdot P_2 \cdots P_n$$

Quindi $P[S] = \prod_{i=1}^{n} p_i$

È possibile costruire impianti elettrici con componenti disposti sia in serie che in parallelo all'interno dello stesso sistema.
La probabilità di funzionamento del sistema permette di stabilire l'affidabilità del circuito costruito.

Esempi

1. Dato il seguente impianto elettrico:



$P[A] = P[B] = 0.9$ prob. di funzionamento del componente

$P[C] = P[D] = 0.8$ " " " " "

Calcolare:

- la probabilità che l'impianto funzioni.
- la probabilità che il componente C non funzioni, sapendo che l'impianto funziona.

S = il sistema funziona

$$P[S] = P[A \cap B \cap (C \cup D)] \underset{\uparrow}{=} P[A] \cdot P[B] \cdot P[C \cup D]$$

indipendenza

$$P[C \cup D] = 1 - P[\overline{C \cup D}] = 1 - P[\bar{C} \cap \bar{D}] \underset{\uparrow}{=} 1 - P[\bar{C}] \cdot P[\bar{D}]$$

indip.

- $P[S] = (0.9) \cdot (0.9) [1 - (0.2) \cdot (0.2)] = \underline{0.7776}$

$$P[\bar{C} \mid S] = \frac{P[S \mid \bar{C}] \cdot P[\bar{C}]}{P[S]}$$

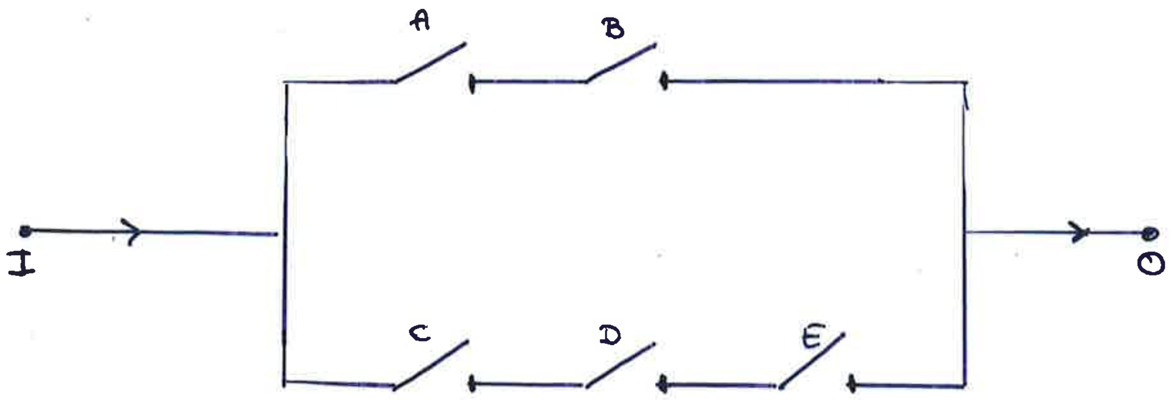
Bayes

ma $P[S \mid \bar{C}] = P[A \cap B \cap D] = P[A] \cdot P[B] \cdot P[D] = (0.9)^2 (0.8)$

quindi

- $P[\bar{C} \mid S] = \dfrac{(0.9)^2 \cdot (0.8) \cdot (0.2)}{0.7776} = \underline{0.1667}$.

② Dato il seguente impianto elettrico:



$P[A] = P[B] = 0.7$

$P[C] = P[D] = P[E] = 0.8$

Chiamo F il sottosistema costituito da A e B.

Chiamo G il sottosistema costituito da C, D, E.

$S =$ il sistema funziona

$P[S] = P[F \cup G] = 1 - P[\overline{F \cup G}] = 1 - P[\bar{F} \cap \bar{G}] \underset{\text{indip}}{=} 1 - P[\bar{F}] \cdot P[\bar{G}]$

ma

$P[F] = P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$

$P[\bar{F}] = 1 - P[F] = 1 - P[A] \cdot P[B]$

analogamente

$P[G] = P[C \cap D \cap E] = P[C] \cdot P[D] \cdot P[E]$

$P[\bar{G}] = 1 - P[C] \cdot P[D] \cdot P[E]$

Quindi

- $P[S] = 1 - (1 - (0.7)^2) \cdot (1 - (0.8)^3)$

$= 1 - (0.51) \cdot (0.488) = \underline{0.7511}$

questa è la probabilità che il sistema funzioni.

Sapendo che il circuito funziona, qual è la probabilità che A non stia funzionando?

- $P[\bar{A} | S] = \dfrac{P[S | \bar{A}] \cdot P[\bar{A}]}{P[S]} = \dfrac{P[C \cap D \cap E] \cdot P[\bar{A}]}{P[S]} = \dfrac{(0.8)^3 \cdot (0.3)}{0.7511}$

$= 0.1536 / 0.7511 = \underline{0.2045}.$