VARIABILI CASUALI

Nei problemi di calcolo delle probabilità si è spesso condotti a considerare delle quantità che sono funzioni del risultato di un certo fenomeno casuale.
La nozione di variabile casuale o aleatoria viene usata per descrivere gli eventi e misura i risultati di una prova, i quali possono assumere differenti valori anche quando le prove vengono eseguite sotto le stesse condizioni.

Sono esempi di variabili casuali: il valore numerico degli esiti del lancio di un dado, la durata della vita di una lampadina, il modulo della velocità di una molecola di un gas, ...
Nel primo caso la v. c. è discreta, cioè assume un insieme finito o numerabile di valori, negli altri due casi è continua, cioè è definita su un intervallo dell'asse dei numeri reali.

DEFINIZIONE: Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definiamo VARIABILE CASUALE o ALEATORIA una applicazione

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

tale che $\forall x \in \mathbb{R}$

$$A_x = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

cioè A_x è un evento.

Una variabile casuale X è perciò una funzione di $\omega \in \Omega$ tale per cui ha senso calcolare la probabilità:

$$P[\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

cioè la probabilità che X assuma valori più piccoli o uguali ad x.

$$A_x = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \overset{DEF}{=} (X \leq x)$$

La variabile casuale X fa corrispondere un numero reale ad ogni esito dell'esperimento.

Esempio

- lancio dei due dadi

$$\Omega = \{(i,j) = \omega \ : \ i = 1, .., 6 \ , \ j = 1, ..., 6\}$$

Considerando il punteggio ottenuto nel lancio dei due dadi:

- $X((i,j)) = i + j$

Allora X assegna ad ogni lancio la somma dei punteggi dei due dadi.

Quindi X è una variabile casuale che assume i valori $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

- $X((i,j)) = |i - j|$

Allora X assegna ad ogni lancio il valore assoluto della differenza dei punteggi dei due dadi.

Quindi X è una variabile casuale che assume i valori $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

DEFINIZIONE: Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, definiamo FUNZIONE DI RIPARTIZIONE di una variabile casuale X la funzione:

$$F : \mathbb{R} \to [0,1]$$

tale che

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = P[X \leq x] = P[\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}]$$

Esempio

- lancio di due dadi

$X = i + j \quad \in [2, 12]$

se $x < 2 \quad (X \leq x) \equiv \phi \qquad P[X \leq x] = 0 \qquad F(x) = 0$

se $2 \leq x < 3 \quad (X \leq x) = \{(1,1)\} \qquad F(x) = \frac{1}{36}$

se $3 \leq x < 4 \quad (X \leq x) = \{(1,1);(1,2);(2,1)\} \qquad F(x) = \frac{3}{36}$

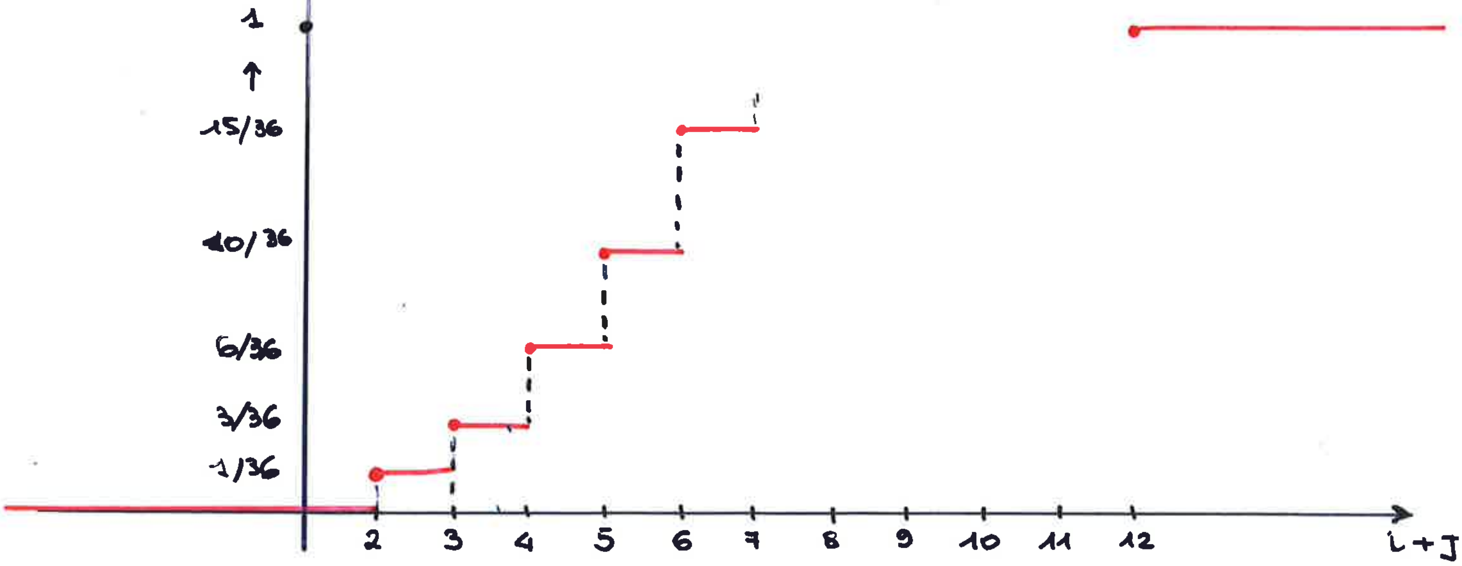
se $4 \leq x < 5 \quad (X \leq x) = \{(1,1);(1,2);(2,1);(2,2)$
$(1,3);(3,1)\} \qquad F(x) = \frac{6}{36}$

⋮

se $11 \leq x < 12 \quad (X \leq x) = \Omega \setminus \{(6,6)\} \qquad F(x) = \frac{35}{36}$

se $x \geq 12 \quad (X \leq x) \equiv \Omega \qquad F(x) = 1.$

È utile ricorrere alla forma grafica della funzione di ripartizione per verificare che essa è una funzione monotona non decrescente definita non solo per tutti i valori assunti dalla variabile casuale, ma per l'intero asse dei numeri reali.



PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE F

1) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

2) se $x_1 < x_2$ $F(x_1) \leq F(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ monotona non decrescente

3) $P[X > x] = 1 - P[X \leq x] = 1 - F(x)$

4) $\lim_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ continua a destra

5) $P[x_1 < X \leq x_2] = F(x_2) - F(x_1)$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $x_1 < x_2$.

infatti $\{X \leq x_2\} = \{X \leq x_1\} \cup \{x_1 < X \leq x_2\}$ unione di eventi disgiunti

$$P[X \leq x_2] = P[X \leq x_1] + P[x_1 < X \leq x_2]$$

quindi

$$P[x_1 < X \leq x_2] = P[X \leq x_2] - P[X \leq x_1]$$

$$= F(x_2) - F(x_1)$$

Nel definire la funzione di ripartizione F non abbiamo fatto distinzione tra variabile casuale discreta e variabile casuale continua. Tale distinzione invece è necessaria quando introduciamo un'altra funzione importante chiamata **funzione di densità** della variabile casuale X.

DEFINIZIONE: Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità e X variabile casuale **discreta**. Definiamo **FUNZIONE DI DENSITÀ DISCRETA** (o funzione di massa o distribuzione di probabilità discreta) la funzione:

$$f : \mathbb{R} \to [0,1]$$

tale che

$$f(x) = P[X=x] = P[\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}] \quad , \forall x \in \mathbb{R}.$$

dove x è detto **PUNTO MASSA**.

PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE DI DENSITÀ DISCRETA f

1) $f(x) \geq 0$

2) $\sum_{x}' f(x) = 1$

OSSERVAZIONE

Assegnata la funzione di ripartizione F di una variabile casuale discreta X è possibile calcolare la funzione di densità discreta f e viceversa.

- $f(\cdot)$ nota $\Rightarrow$ $F(x) = P[X \leq x] = \sum_{t \leq x}' f(t) \quad , \forall x \in \mathbb{R}$

- $F(\cdot)$ nota $\Rightarrow$ $f(x) = F(x) - \lim_{h \to 0^+} F(x-h)$

$$= P[X=x] \quad \text{ampiezza del salto}$$

Esempi

- lancio di un dado

X = numero della faccia in alto

$f(x) = \frac{1}{6} \qquad x = x_k \qquad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

se $x < 1$ $\quad P[X \leq x] = P[\phi] = 0 \qquad F(x) = 0$

se $1 \leq x < 2$ $\quad P[X \leq x] = \sum_{t \leq x} f(t) = f(1) \qquad F(x) = \frac{1}{6}$

se $2 \leq x < 3$ $\quad P[X \leq x] = f(1) + f(2) \qquad F(x) = \frac{2}{6}$

se $3 \leq x < 4$ $\quad P[X \leq x] = f(1) + f(2) + f(3) \qquad F(x) = \frac{3}{6}$

se $4 \leq x < 5$ $\quad P[X \leq x] = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) \qquad F(x) = \frac{4}{6}$

se $5 \leq x < 6$ $\quad P[X \leq x] = 1 - f(6) \qquad F(x) = \frac{5}{6}$

se $x \geq 6$ $\quad P[X \leq x] = P(\Omega) = 1 \qquad F(x) = 1$

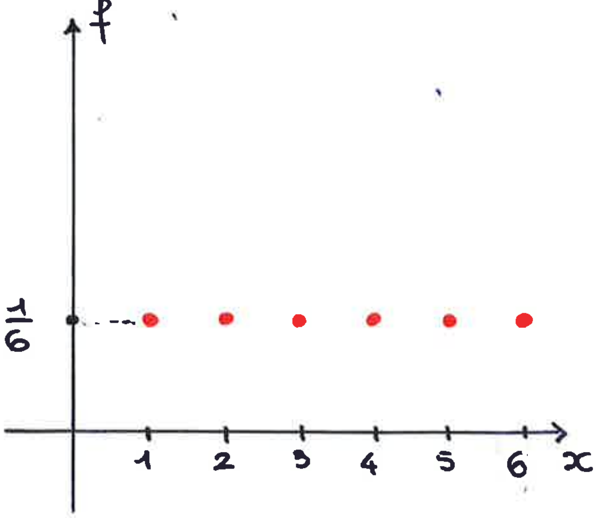
La funzione di ripartizione è costante tra un punto masse e il successivo ed ha un salto costante ($\sim$ funzione di densità) nei punti massa.

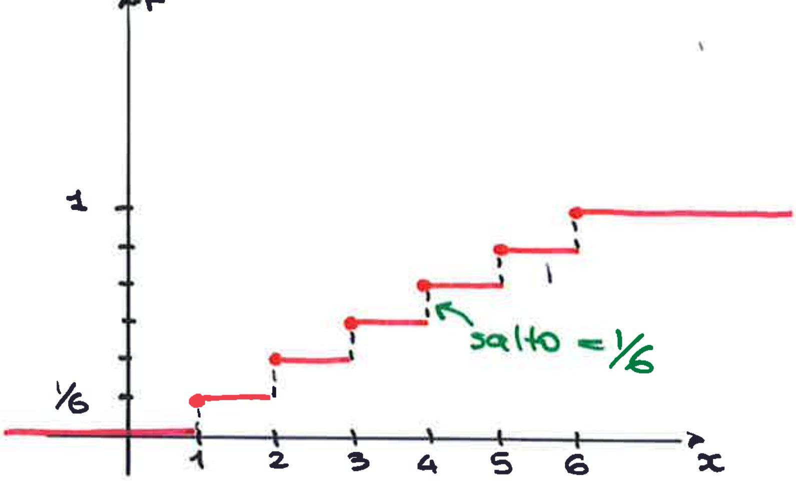
Scelto $x = 2.5 \qquad F(2.5) = ?$

$$F(2.5) = \sum_{t \leq 2.5} f(t) = f(1) + f(2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Scelto $x = 3 \qquad f(3) = ?$

$$f(3) = F(3) - \lim_{h \to 0^+} F(3-h) = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$





- lancio dei due dadi

Abbiamo già costruito la funzione di ripartizione, determiniamo ora la funzione di densità.

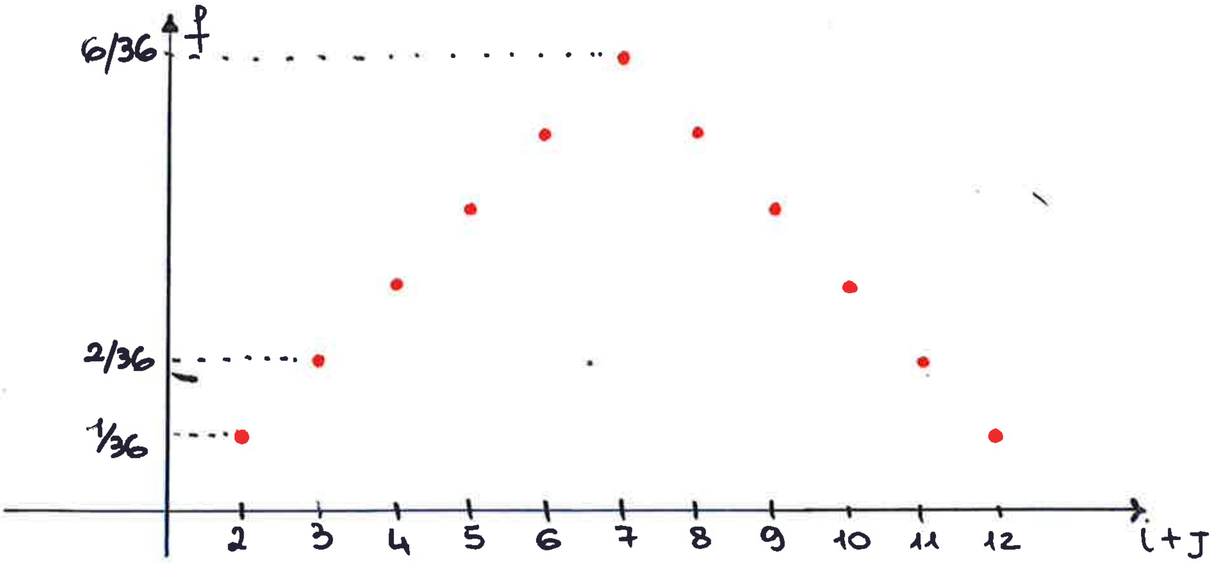
se $x = 2$ $\quad P[X=2] = P[\{1,1\}] = \frac{1}{36}$

se $x = 3$ $\quad P[X=3] = P[\{(1,2);(2,1)\}] = \frac{2}{36}$

⋮

se $x = 11$ $\quad P[X=11] = P[\{(5,6);(6,5)\}] = \frac{2}{36}$

se $x=12$ $\quad P[X=12] = P[\{6,6\}] = \frac{1}{36}$



Per una variabile casuale X continua non ha senso calcolare la probabilità che essa sia uguale esattamente ad uno dei valori che può assumere, mentre ha senso calcolare la probabilità che la v. casuale cada all'interno di un intervallo di valori ammissibili.

DEFINIZIONE: Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità. Una variabile casuale X è detta continua se esiste una funzione

$$f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$$

tale che:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

La funzione f è detta **FUNZIONE DI DENSITÀ DI PROBABILITÀ CONTINUA**.

La funzione di ripartizione F è assolutamente continua (cioè può essere scritta come l'integrale della sua derivata)

PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE DI DENSITÀ CONTINUA f.

1. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ in cui è definita $F'(x)$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

3. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$$P[a \leq X \leq b] = \int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

COMMENTI

- $P[a<X<b] = P[a\leq X<b] = P[a<X\leq b] = P[a\leq X\leq b]$
cioè non è rilevante includere o meno un estremo dell'intervallo poiché $P[X=a]=P[X=b]=0$.
(se l'intervallo si riduce ad un solo punto l'integrale è nullo)

- se X v. casuale discreta invece
$P[a<X\leq b] \neq P[a\leq X\leq b]$

infatti
$P[a<X\leq b] = F(b)-F(a)$
poiché
$$P[a<X\leq b] = P[-\infty<X\leq b] - P[-\infty<X\leq a]$$
$$= F(b) - \underbrace{F(-\infty)}_{0} - F(a) + \underbrace{F(-\infty)}_{0}$$
mentre
$$P[a\leq X\leq b] = P[-\infty<X\leq b] - P[-\infty<X<a]$$
ma $P[X<a] = P[X\leq a] - P[X=a]$

quindi
$$P[a<X\leq b] = F(b)-F(a)+f(a)$$

- Se X v. casuale discreta
$P[X=x]=0$ significa che x non è un possibile risultato per X.
quindi un evento con probabilità nulla è sinonimo di evento impossibile.

- Se X v. casuale continua, $f(x)$ non rappresenta la probabilità $P[X=x]$ che è sempre nulla $\forall x\in\mathbb{R}$, mentre $f(x)$ non è nulla dappertutto. Quindi nel caso continuo è solo l'integrale della $f(x)$ su un intervallo che ha il significato di probabilità.

Esempi.

- durata di una conversazione telefonica

Può essere descritta da una variabile continua X avente la seguente funzione di ripartizione

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ 1-e^{-\lambda x} & , x\geq 0 \end{cases} ; \quad \underline{\lambda>0}$$

allora

$$f(x) = F'(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , x \geq 0$$
$$f(x) = 0 \quad , x<0$$
$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & , x\geq 0 \end{cases}$$

Se la durata della conversazione è espressa in minuti calcolare la probabilità che la conversazione duri tra i 5 e i 10 minuti.

$$P[5<X<10] = \int_5^{10} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_5^{10}$$
$$= e^{-5\lambda} - e^{-10\lambda}$$

oppure

$$P[5<X<10] = F(10)-F(5)$$
$$= \left[1-e^{-\lambda x}\right]_{x=10} - \left[1-e^{-\lambda x}\right]_{x=5}$$
$$= -e^{-10\lambda} + e^{-5\lambda}$$

Una variabile casuale continua X con funzione di ripartizione e funzione di densità sopra definite viene detta v.c. esponenziale.

- In un esperimento di laboratorio controllato, si suppone che l'errore della temperatura di reazione, in °C, sia una variabile casuale continua X con la seguente funzione di densità:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} & -1 < x < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

1) verificare che $f(x)$ sia una f. di densità.
2) determinare la funzione di ripartizione F.
3) calcolare $P[0 < X \leq 1]$.

1) $f(x) \geq 0$ ovvio

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-1} \underset{0}{\underset{\parallel}{f(x)}}\,dx + \int_{-1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{+\infty} \underset{0}{\underset{\parallel}{f(x)}}\,dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{1}{9}\,x^3\Big]_{-1}^{2} = \frac{1}{9}(8+1) = 1$$

2)
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

se $x < -1$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} \underset{0}{\underset{\parallel}{f(t)}}\,dt = 0$

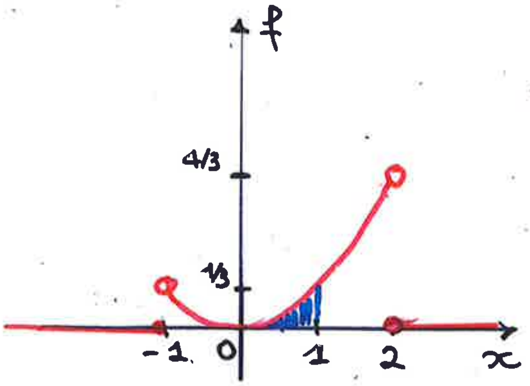
se $-1 \leq x < 2$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{-1} \underset{0}{\underset{\parallel}{f(t)}}\,dt + \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$

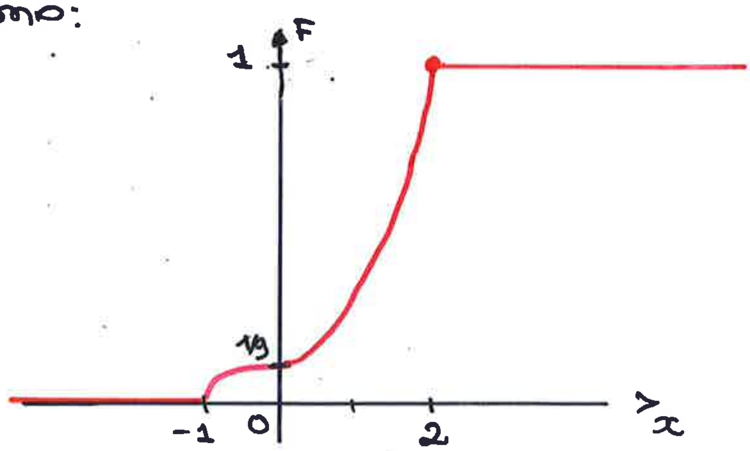
$$= \int_{-1}^{x} \frac{t^2}{3}\,dt = \frac{1}{9}\,t^3\Big]_{-1}^{x} = \frac{1}{9}(x^3+1)$$

se $x \geq 2$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{-1} \underset{0}{\underset{\parallel}{f(t)}}\,dt + \underbrace{\int_{-1}^{2} f(t)\,dt}_{=1} + \int_{2}^{x} \underset{0}{\underset{\parallel}{f(t)}}\,dt = 1$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{x^3+1}{9} & -1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

I grafici di $f(x)$ e $F(x)$ sono:





$F(0) = \frac{1}{9}$

$F'(x) = \frac{x^2}{3} > 0$ f. crescente

Ricorda che

$F''(x) = \frac{2}{3} x$ $\begin{cases} f'' > 0 \text{ se } x > 0 & \text{concavità verso l'alto} \\ f'' < 0 \text{ se } x < 0 & \text{" " il basso} \end{cases}$

$F''(x) = 0$ per $x = 0$ flesso

3) Possiamo seguire due metodi:

$$P[0 < X \leq 1] = \int_0^1 \frac{x^2}{3}\, dx = \frac{1}{9} x^3 \Big]_0^1 = \frac{1}{9}$$

oppure

$$P[0 < X \leq 1] = F(1) - F(0) = \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

IL VALORE ATTESO

Un importante indicatore numerico che misura la tendenza centrale di una variabile casuale X è la media o valore atteso o speranza matematica.
Il valore atteso viene calcolato utilizzando la distribuzione di probabilità.

DEFINIZIONE Sia X una variabile casuale con distribuzione di probabilità $f(x)$. Chiamiamo VALORE ATTESO o MEDIA di X il numero μ_x o $E[X]$ definito come:

- $\mu_x = E[X] = \sum_i x_i f(x_i)$ se X è v.c. discreta
- $\mu_x = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$ se X è v.c. continua

La media, indicando dove sono "centrati" i valori di X è anche detta centro di gravità o baricentro di una densità.

OSSERVAZIONE
Se la variabile casuale X è discreta e finita e $x_1, \dots, x_m$ sono i valori che può assumere con probabilità uniforme, cioè

$$f(x_i) = \frac{1}{m} \quad i = 1, \dots, m$$

allora

$$E[X] = \sum_{i=1}^{m} x_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \frac{1}{m}$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i = \bar{x}_m$$

è detto valore medio di X.

OSSERVAZIONE

Per una v.c. discreta, $E[X]$ rappresenta la media pesata di tutti i possibili valori che X può assumere, ognuno pesato con la probabilità che X lo assuma.

(ricorda che $f(x_i) = P[X = x_i]$)

Esempi

- lancio dei due dadi

$X = i + j \qquad i = 1, \dots, 6 \ , \ j = 1, \dots, 6 \qquad X \in [2, 12]$

$$E[X] = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \dots + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7.$$

(vedi grafico di $f(x)$)

- durata di una conversazione telefonica

X v.c. continua con funzione di densità:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \quad , \lambda > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = -\int_0^{+\infty} x \cdot (-\lambda e^{-\lambda x}) dx$$

Integrando per parti $g(x) = x \quad f'(x) = -\lambda e^{-\lambda x} \Rightarrow f = e^{-\lambda x}$

$$E[X] = -\left| x e^{-\lambda x} \right|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \cdot 1 \, dx$$

$$= -\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} + \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \int_0^{+\infty} -\lambda e^{-\lambda x} dx$$

Hospital

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda x}} + \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \left| e^{-\lambda x} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

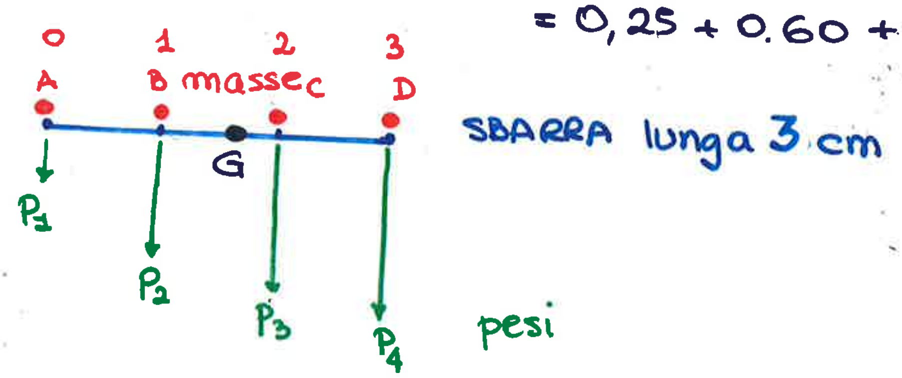
ANALOGIA CON IL BARICENTRO

Data una v. casuale discreta X che può assumere i valori:
$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ con probabilità:

$P[0] = 0.10$, $P[1] = 0.25$, $P[2] = 0.30$, $P[3] = 0.35$

(N.B. $\sum_{i=1}^{4} P[X = x_i] = 1$)

$$E[X] = \sum_{i=1}^{4} x_i f(x_i) = 0 \cdot 0{,}10 + 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}30 + 3 \cdot 0.35$$
$$= 0{,}25 + 0.60 + 1.05 = 1.9$$



$\overline{AG} = x$

$$x \cdot P_1 + (x-1) \cdot P_2 - (2-x) P_3 - (3-x) P_4 = 0$$

$$x \underbrace{(P_1 + P_2 + P_3 + P_4)}_{=1} - P_2 - 2P_3 - 3P_4 = 0$$

$$x = 0{,}25 + 2 \cdot 0.30 + 3 \cdot 0.35 = 1.9 \text{ cm}.$$

Il baricentro G è il punto in cui la sbarra rimane in equilibrio orizzontale, ed è applicato il peso totale $p = 1$.
$E[X]$ è il punto rispetto al quale è nulla la somma dei momenti dei pesi delle singole masse.

LA VARIANZA

Un altro indicatore numerico che sia in grado di caratterizzare la variabilità della variabile casuale X attorno alla sua media $\mu_x = E[X]$ è la varianza.

DEFINIZIONE Sia X variabile casuale con funzione di densità $f(x)$ e media μ_x. Definiamo VARIANZA di X il numero reale positivo $\sigma_x^2 = var[X]$:

$$\sigma_x^2 = var[X] = \sum_i (x_i - \mu_x)^2 f(x_i) \quad \text{se X è discreta}$$

$$\sigma_x^2 = var[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 f(x)\, dx \quad \text{se X è continua}$$

Il numero reale positivo:

$$\sigma_x = \sqrt{var[X]}$$

è detto DEVIAZIONE STANDARD o SCARTO QUADRATICO MEDIO di X.

OSSERVAZIONE

La varianza è molto più piccola per un insieme di valori di x che sono vicini alla media μ, rispetto ad un insieme di valori che si scostano molto da μ.

OSSERVAZIONE

Come la media rappresenta il centro di gravità o baricentro, così la varianza si può interpretare come il momento d'inerzia della densità rispetto ad un asse passante per il baricentro.

Esempi

- lancio di due dadi

$X = i + j \qquad X \in [2, 12]$

$E[X] = 7$

$$var[X] = (2-7)^2 \cdot \frac{1}{36} + (3-7)^2 \cdot \frac{2}{36} + \dots + (11-7)^2 \cdot \frac{2}{36} + (12-7)^2 \cdot \frac{1}{36}$$

$$= \frac{35}{6}$$

- durata di una conversazione telefonica

X continua con

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \quad , \lambda > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$var[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(x^2 - \frac{2}{\lambda} x + \frac{1}{\lambda^2}\right) \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= -\int_0^{\infty} \underbrace{-\lambda e^{-\lambda x}}_{f'} \underbrace{x^2}_{g} dx - 2\int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx$$

per parti

$$= -\left[e^{-\lambda x} \cdot x^2\right]_0^{+\infty} + \cancel{\int_0^{\infty} 2x e^{-\lambda x} dx} - \cancel{2\int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx}$$

$$+ \frac{1}{\lambda}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\int_0^{\infty} -\lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= -\underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{\lambda x}}}_{\to 0} - \frac{1}{\lambda^2}\left[e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Hospital 2 volte