VALORE ATTESO DI UNA FUNZIONE DI V. CASUALE

Il concetto di valore atteso viene esteso anche ad una funzione di variabile casuale.
Se X è v. casuale e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ allora $Y = g(X)$ è una variabile casuale.

DEFINIZIONE Chiamiamo **VALORE ATTESO** di $g(X)$ v. casuale la quantità:

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i)\, f(x_i) \qquad \text{se } X \text{ è discreta}$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f(x)\, dx \qquad \text{se } X \text{ è continua}$$

OSSERVAZIONI

- $g(X) = X$
  $\Rightarrow E[g(X)] = E[X] = \mu_X$
- $g(X) = (X - \mu_X)^2$
  $\Rightarrow E[g(X)] = E[(X-\mu_X)^2] = var[X] = \sigma_X^2$.

Esempi

- Sia X v. casuale che rappresenta il numero di automobili lavate in un autolavaggio tra le 16 e le 17 di un dato giorno. Supponiamo che X abbia la seguente distribuzione di probabilità:

x	4	5	6	7	8	9
$f(x) = P[X=x]$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\sum_{x_i} f(x_i) = 1$$

Sia $g(X) = 2X - 1$ la v. casuale che rappresenta la quantità (in euro) di denaro, pagato all'addetto dal gestore.
Calcolare il guadagno atteso dell'addetto tra le 16 e le 17.

$$E[g(X)] = E[2X-1] = \sum_{x=4}^{9} (2x-1) f(x)$$

$$= 7 \cdot \frac{1}{12} + 9 \cdot \frac{1}{12} + 11 \cdot \frac{1}{4} + 13 \cdot \frac{1}{4} + 15 \cdot \frac{1}{6}$$

$$+ 17 \cdot \frac{1}{6} = 12,67 \text{ euro.}$$

- Sia X v. casuale (continua) che rappresenta il tempo impiegato per trovare un guasto in un impianto elettrico. (misurato in ore).

Supponiamo che X abbia la seguente funzione di densità:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Causa il guasto, l'interruzione di x ore dell'impianto provoca un danno economico $g(X) = X^3$.
Calcolare il valore atteso del danno.

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x)\, dx = \int_0^1 x^3\, dx = \frac{1}{4} = 0.25$$

PROPRIETÀ DEL VALORE ATTESO

Elenchiamo ora le proprietà del valore atteso di una funzione di variabile casuale, che possono quindi essere espresse sia per v.c. discrete che continue.

1) $E[c] = c$ con c costante $\in \mathbb{R}$.

$$E[c] = \sum_x c f(x) = c \underbrace{\sum_x f(x)}_{=1} = c$$

(nel continuo $\sum_x$ è sostituito da $\int_{-\infty}^{+\infty}$)

2) $E[c\, g(X)] = c\, E[g(X)]$ con c costante $\in \mathbb{R}$

$$E[c\, g(X)] = \sum_x c\, g(x) f(x) = c \sum_x g(x) f(x) = c\, E[g(X)]$$

3) $E[c_1 g_1(X) + c_2 g_2(X)] = c_1 E[g_1(X)] + c_2 E[g_2(X)]$

con c_1, c_2 costanti $\in \mathbb{R}$.

$$E[c_1 g_1(X) + c_2 g_2(X)] = \sum_x [c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)] f(x)$$

$$= \sum_x c_1 g_1(x) f(x) + \sum_x c_2 g_2(x) f(x)$$

$$= c_1 \sum_x g_1(x) f(x) + c_2 \sum_x g_2(x) f(x)$$

$$= c_1 E[g_1(X)] + c_2 E[g_2(X)]$$

4) se $g_1(X) \leq g_2(X)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$E[g_1(X)] \leq E[g_2(X)]$$

$$0 \leq E[g_2(X)] - E[g_1(X)] = E[g_2(X) - g_1(X)]$$

$$= \sum_x \underbrace{[g_2(x) - g_1(x)]}_{\geq 0} \underbrace{f(x)}_{\geq 0}$$

5) DISUGUAGLIANZA DI MARKOV

Data una funzione $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $g(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ per cui esista $E[g(x)]$, allora:

$$P[g(x) \geq \varkappa] \leq \frac{1}{\varkappa} E[g(x)] \quad , \ \forall \varkappa > 0$$

6) DISUGUAGLIANZA DI CHEBYSHEV

- Data una variabile casuale X con media μ_X e varianza σ_X^2 si ha:

$$P[|X - \mu_X| \geq k\sigma_X] \leq \frac{1}{k^2} \quad , \ \forall k > 0$$

o equivalentemente

$$P[|X-\mu_X| < k\sigma_X] = P[\mu_X - k\sigma_X < X < \mu_X + k\sigma_X] \geq 1 - \frac{1}{k^2} \ , \forall k > 0$$

La disuguaglianza di Chebyshev si ottiene dalla disuguaglianza di Markov per un'opportuna scelta di $g(\cdot)$ e di $\varkappa$.

Infatti siano $g(x) = (x - \mu_x)^2$ ed $\varkappa = k^2\sigma_X^2 \ (> 0)$

Per Markov si ottiene:

$$P[(X-\mu_X)^2 \geq k^2\sigma_X^2] \leq \frac{1}{k^2\sigma_X^2} \underbrace{E[(X-\mu_X)^2]}_{= var[X] = \sigma_X^2} = \frac{1}{k^2}$$

e $P[(X-\mu_X)^2 \geq k^2\sigma_X^2] = P[|X-\mu_X| \geq k\sigma_X]$

OSSERVAZIONE

- Se $g(x) = X$ con $X > 0$ per Markov

$$P[X \geq a] \leq \frac{1}{a} E[X] \quad , \ \forall a > 0.$$

COMMENTI

- Verifichiamo la disuguaglianza di Markov nel caso continuo

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_0^{\infty} x f(x)\,dx = \underbrace{\int_0^{a} x f(x)\,dx}_{>0} + \underbrace{\int_a^{+\infty} x f(x)\,dx}_{>0}$$

$X>0,\ f(x)\geq 0$

$$\geq \int_a^{+\infty} x f(x)\,dx \underset{\uparrow}{\geq} \int_a^{+\infty} a f(x)\,dx = a\int_a^{+\infty} f(x)\,dx =$$

$x \geq a$

ma

$$P[X\geq a] = 1 - P[X<a] = 1 - \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$= a\,P[X\geq a]$$

analogamente

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx = \overbrace{\int_{\{x\,:\,g(x)\geq r\}} g(x) f(x)\,dx}^{\geq 0} + \overbrace{\int_{\{x\,:\,g(x)<r\}} g(x) f(x)\,dx}^{\geq 0}$$

$$\geq \int_{\{x:\,g(x)\geq r\}} g(x) f(x)\,dx \geq \int_{\{x:\,g(x)\geq r\}} r f(x)\,dx$$

$$= r\int_{\{x:\,g(x)\geq r\}} f(x)\,dx = r\,P[g(x)\geq r]$$

- la disuguaglianza di Chebyshev afferma che più la varianza della variabile casuale X è piccola, più è piccola la probabilità che X assuma valori lontani dalla sua media.

- la disuguaglianza di Chebyshev afferma che la probabilità che una qualsiasi variabile casuale X assuma un valore all'interno di k deviazioni standard dalla media è almeno $1 - \frac{1}{k^2}$.

  - per $k = 2 \Rightarrow$ X ha una probabilità di almeno $\frac{3}{4}$ di cadere all'interno di 2 deviazioni standard dalla media $\mu \pm 2\sigma$.
  - per $k = 3 \Rightarrow$ X ha una probabilità di almeno $\frac{8}{9}$ di cadere all'interno di 3 deviazioni standard dalla media $\mu \pm 3\sigma$.

- Il valore determinato con la disuguaglianza di Chebyshev è riferito SOLO AL LIMITE INFERIORE, cioè si sa che la probabilità di una v.c. X di cadere all'interno di 2 deviazioni standard è almeno $\frac{3}{4}$, ma non si sa di quanto potrebbe essere maggiore di $\frac{3}{4}$.
  Questo accade perchè NON È NOTA la $f(x)$, cioè la funzione di densità della v.c. X.

Perciò l'utilizzo della disuguaglianza di Chebyshev è limitato ai casi in cui non è nota la forma della distribuzione della v. casuale.

Esempio

Sia X variabile casuale corrispondente al numero di pezzi prodotti da una fabbrica in una settimana.
Si sa che $\mu_X = 50$.

- Calcolare la $P[X \geq 75]$.
- Sapendo che $\sigma_X^2 = 25$, calcolare la $P[40 < X < 60]$.

La funzione di densità $f(x)$ non è nota.
Posso solo applicare Markov e Chebyshev.

- $P[X \geq 75] \leq \frac{1}{75} E[X] = \frac{1}{75} \cdot 50 = \frac{2}{3}$

- $P[40 < X < 60] = P[40-50 < X-50 < 60-50]$

$$= P[-10 < X-50 < 10]$$

$$= P[|X-50| < 10]$$

$$= 1 - P[|X-50| \geq 10]$$

ma

$$P[|X-50| \geq 10] = P[(X-50)^2 \geq 100] \leq \frac{1}{100} \underbrace{E[(X-50)^2]}_{= var[X]}$$

$$= \frac{\sigma_X^2}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow P[40 < X < 60] \geq \frac{3}{4}$.

- Se fosse nota la funzione di densità associata ad X, cioè $f(x)$:

$$P[X \geq a] = 1 - P[X < a]$$

- se X continua $P[X<a] = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$

- se X discreta $P[X<a] = P[X \leq a] - P[X=a]$

$$= F(a) - f(a).$$

e quindi riuscirei a calcolare esattamente la probabilità

PROPRIETÀ DELLA VARIANZA

1) $var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[(X - \mu_x)^2]$

segue dalla definizione di varianza e di valore atteso di una funzione di variabile casuale ($g(x) = (x - \mu_x)^2$)

2) $var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = E[X^2] - \mu_x^2$

$$E[(X - E[X])^2] = E[X^2 - 2X\,E[X] + E[X]^2]$$

$$= E[X^2] - 2E[X\,E[X]] + E[E[X]^2]$$

$E[X]$ è un valore numerico, quindi si comporta come una costante ($E[c] = c$)

$$= E[X^2] - 2E[X] \cdot E[X] + E[X]^2$$

$$= E[X^2] - E[X]^2$$

3) $var[aX] = a^2\,var[X]$, $\forall a \in \mathbb{R}$

$$var[aX] = E[(aX - E[aX])^2] = E[(aX - aE[X])^2]$$

$$= E[a^2(X - E[X])^2] = a^2\,E[(X - E[X])^2]$$

$$= a^2\,var[X]$$

4) $var[X + a] = var[X]$, $\forall a \in \mathbb{R}$

$$var[X + a] = E[\{(X + a) - E[X + a]\}^2]$$

$$= E[\{X + a - E[X] - E[a]\}^2]$$

$$= E[(X + \cancel{a} - E[X] - \cancel{a})^2]$$

$$= var[X]$$

N.B: $var[X + X] = 4\,var[X]$ (per 3) con $a = 2$)

Esempio

Sia X v. casuale continua e si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2} & 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

1) Determinare il valore di c affinché f sia una densità e disegnare il grafico di f(x).
2) Determinare la funzione di ripartizione F(x) e disegnarne il grafico.
3) Calcolare $P[1.5 < X < 2]$
4) Calcolare la media e la varianza di X.

- $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \ge 0 \Rightarrow c \ge 0$

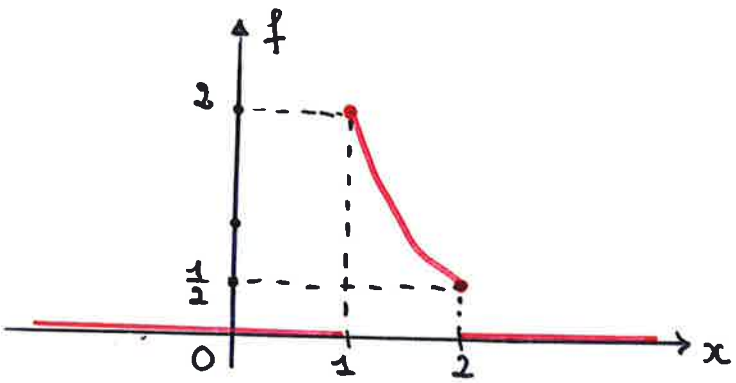
  Inoltre vale:

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

  cioè:

  $$1 = \int_1^2 \frac{c}{x^2}\,dx = c\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = c \cdot \frac{1}{-2+1} \left. x^{-2+1} \right]_1^2$$

  $$= -c\left(\frac{1}{x}\right)_1^2 = -c\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{c}{2} \Rightarrow c = 2$$



- $F(x) = P[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

se $x<1$ $\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} \underbrace{f(t)}_{=0}\,dt \equiv 0$

se $1 \le x < 2$ $\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{1} \underbrace{f(t)}_{=0}\,dt+\int_{1}^{x} f(t)\,dt$

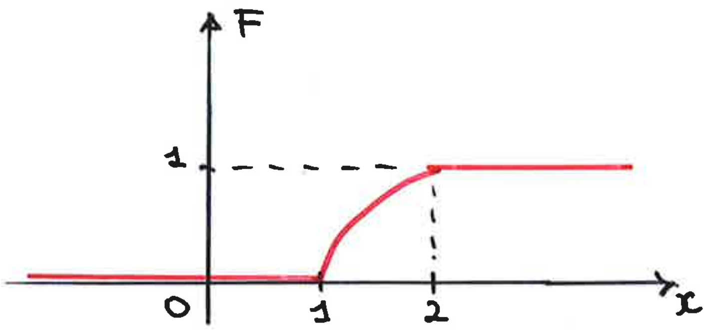
$$=\int_{1}^{x} \frac{2}{t^2}\,dt = 2\cdot\left(-\frac{1}{t}\right)_{1}^{x}=2\left(-\frac{1}{x}+1\right)$$

$$=2-\frac{2}{x}$$

se $x \ge 2$ $\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{1} \underbrace{f(t)}_{=0}\,dt+\underbrace{\int_{1}^{2} f(t)\,dt}_{\equiv 1}+\int_{2}^{x} \underbrace{f(t)}_{=0}\,dt \equiv 1$

Riassumendo:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ 2-\frac{2}{x} & 1 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$



- $P[1.5<X<2]=F(2)-F\left(\frac{3}{2}\right)=1-\left(2-\frac{2}{x}\right)_{x=\frac{3}{2}}$

$$=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

oppure se non fosse stata chiesta la $F(x)$.

$$P[1.5<X<2]=\int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{2}{x^2}\,dx=2\left(-\frac{1}{x}\right)_{\frac{3}{2}}^{2}=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

- $E[X] = \mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_1^2 x \cdot \frac{2}{x^2}\, dx = 2 \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$

$$= 2 \ln|x| \Big|_1^2 = 2(\ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{0}) = 2 \ln 2 = \ln 2^2 = \ln 4$$

- $var[X] = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 f(x)\, dx$

anziché applicare la definizione di varianza, utilizziamo la proprietà n. 2 della varianza cioè:

$$var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = E[X^2] - \mu_x^2$$

perchè la media μ_x è già stata calcolata.

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_1^2 x^2 \cdot \frac{2}{x^2}\, dx = 2\, x \Big]_1^2 = 2$$

Quindi:

$$var[X] = 2 - (\ln 4)^2$$

Quesito teorico

Sia X variabile casuale. Se esiste $E[X]$ e la funzione di densità $f(x)$ è simmetrica rispetto ad a, $\forall a \in \mathbb{R}$, allora

$$E[X] = a$$

N.B.: $\forall a \in \mathbb{R}$, una funzione $f(x)$ è simmetrica rispetto ad a se

$$f(x) = f(2a - x)$$

Dimostrazione (caso continuo)

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} x f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

Poniamo $y = 2a - x$ $\quad dy = -dx$ $\quad x = a \rightarrow y = a$

$x = +\infty \rightarrow y = -\infty$

$$= \int_{-\infty}^{a} x f(x)\,dx + \int_{a}^{-\infty} (2a - y) f(2a - y)(-dy)$$

$$= \int_{-\infty}^{a} x f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} (y - 2a) \underbrace{f(2a - y)}_{= f(y)}\,dy$$

$$= \cancel{\int_{-\infty}^{a} x f(x)\,dx} - \cancel{\int_{-\infty}^{a} y f(y)\,dy} + 2a \int_{-\infty}^{a} f(y)\,dy$$

ma f è simmetrica rispetto ad a, cioè:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \quad \text{perché} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$= 2a \cdot \frac{1}{2} = a.$$

I MOMENTI

Oltre il valore atteso e la varianza esistono altre quantità che possono misurare le caratteristiche di una variabile casuale: sono i valori attesi di potenze della variabile casuale, detti momenti.

DEFINIZIONE: Sia X una variabile casuale con media μ_X. Chiamiamo MOMENTO DI ORDINE r ($r \in \mathbb{N}$) di X la quantità:

$$\mu'_r = E[X^r]$$

dove

$$E[X^r] = \sum_x x^r f(x) \quad \text{se } X \text{ è discreta}$$

$$E[X^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\,dx \quad \text{se } X \text{ è continua}$$

- $\mu'_1 = E[X] = \mu_X$

DEFINIZIONE: Sia X una variabile casuale con media μ_X. Chiamiamo MOMENTO CENTRALE DI ORDINE r ($r \in \mathbb{N}$) la quantità:

$$\mu_r = E[(X-\mu_X)^r]$$

dove

$$\mu_r = \sum_x (x-\mu_x)^r f(x) \quad \text{se } X \text{ è discreta}$$

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^r f(x)\,dx \quad \text{se } X \text{ è continua}$$

- $\mu_1 = E[X-\mu_X] = E[X] - \mu_X = \mu_X - \mu_X = 0$
- $\mu_2 = E[(X-\mu_X)^2] = var[X] = \sigma_X^2$

OSSERVAZIONE

Il momento centrale di ordine 3 μ_3 è un indice di asimmetria della curva $f(x)$; il momento centrale di ordine 4 μ_4 è un indice di appiattimento della curva $f(x)$ attorno al suo punto di massimo.

Se la funzione di densità $f(x)$ è simmetrica rispetto al valore atteso μ_x allora tutti i momenti centrali dispari $(r>1)$ della variabile casuale X sono nulli, cioè:

$$\mu_{2r+1}=0 \quad , \forall r\in\mathbb{N}$$

Verifichiamolo (nel caso continuo) per $r=1 \Rightarrow \mu_3=0$.

$$\mu_3=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_x)^3 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\mu_x}(x-\mu_x)^3 f(x)\,dx + \int_{\mu_x}^{+\infty}(x-\mu_x)^3 f(x)\,dx$$

$x=2a-y \qquad a=\mu_x \qquad f(y)=f(2a-y)$ se f simmetrica rispetto ad a

$$=\int_{-\infty}^{\mu_x}(x-\mu_x)^3 f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\mu_x}(2\mu_x-y-\mu_x)^3 f(2\mu_x-y)\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\mu_x}(x-\mu_x)^3 f(x)\,dx + \underbrace{\int_{-\infty}^{\mu_x}(\mu_x-y)^3 f(y)\,dy}_{=-\int_{-\infty}^{\mu_x}(y-\mu_x)^3 f(y)\,dy} \equiv 0$$

OSSERVAZIONE

Poiché $var[X]=E[X^2]-E[X]^2$ possiamo anche scrivere

- $\sigma_x^2=\mu_2'-(\mu_1')^2$ poiché $\mu_1'=\mu_x$

Sebbene i momenti di una variabile casuale possono essere determinati attraverso la definizione, è possibile utilizzare una procedura alternativa che si basa sulla funzione generatrice dei momenti.

DEFINIZIONE: Data una variabile casuale X, $\forall t \in I$ con $I = [-h, h]$, $h>0$, definiamo FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI di X la quantità:

$$m(t) = E[e^{tX}]$$

se tale valore è finito, dove

$$m(t) = \sum_x e^{tx} f(x) \qquad \text{se } X \text{ è discreta}$$

$$m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\, dx \qquad \text{se } X \text{ è continua}$$

- Se si può definire la funzione generatrice dei momenti di una variabile casuale X, allora tale funzione può essere utilizzata per generare tutti i momenti di X. perchè

$$m^{(r)}(0) = \frac{d^r}{dt^r} m(t) \Big|_{t=0} = \mu'_r$$

verifichiamolo nel caso continuo.

$$\frac{d}{dt} m(t) = \int_{\infty}^{+\infty} x\, e^{tx} f(x)\, dx$$

$$\frac{d^2}{dt^2} m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{tx} f(x)\, dx$$

$\vdots$

r volte

$$\frac{d^r}{dt^r} m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r e^{tx} f(x)\, dx$$

calcoliamo ora

$$\lim_{t \to 0} \frac{d^r}{dt^r} m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\, dx = E[X^r] = \mu'_r$$

$$\| $$

$$\frac{d^r}{dt^r} m(t) \Big|_{t=0} = m^{(r)}(0)$$

Esempio

- durata di una conversazione telefonica

X v. casuale continua:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0, \ \lambda > 0 \end{cases}$$

$$m(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-(\lambda - t)x} dx$$

$$= \frac{1}{-(\lambda - t)} \cdot \lambda \int_0^{\infty} \underbrace{-(\lambda - t) e^{-(\lambda - t)x}}_{f'} dx$$

$$= -\frac{\lambda}{(\lambda - t)} \left[e^{-(\lambda - t)x} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad , \quad |t| < \lambda$$

$$m'(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} \quad , \quad m'(0) = \frac{1}{\lambda} = E[X] = \mu_X = \mu'_1$$

$$m''(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3} \quad , \quad m''(0) = \frac{2}{\lambda^2} = E[X^2] = \mu'_2 \Rightarrow \sigma^2_X = m''(0) - m'(0)^2$$