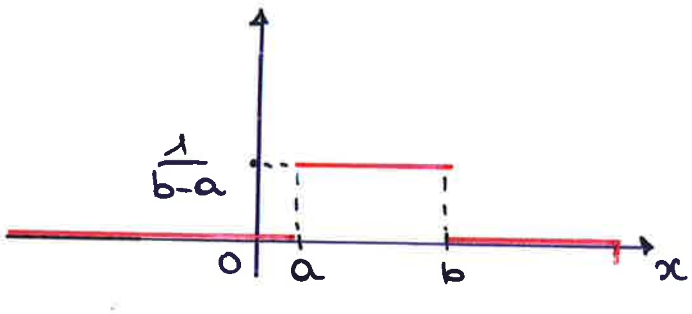
DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ CONTINUE

DISTRIBUZIONE UNIFORME CONTINUA

Tra tutte le distribuzioni continue, la più semplice è la distribuzione uniforme o rettangolare, caratterizzata da una funzione di densità "piatta". La variabile casuale continua uniforme X è definita su un intervallo chiuso $[a,b]$ e la sua probabilità è uniforme su $[a,b]$:

$$U(x;a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



- $E[X] = \frac{a+b}{2}$
- $var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$

Si ottengono applicando la def. di valore atteso e varianza di ~~una~~ v.c. continua.

Esempi

1) Una sala per congressi può essere prenotata per al massimo 4 ore.

La durata di una conferenza può essere rappresentata da una v.c. uniforme X su $[0,4]$.

- Scrivere la funzione di densità.
- Calcolare la probabilità che una qualunque conferenza duri almeno 3 ore.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$P[X \geq 3] = \int_3^4 \frac{1}{4}\, dx = \frac{1}{4}\, x\Big]_3^4 = \frac{1}{4}$$

2) Gli autobus passano nei pressi dell'università ogni ora tra le 8.30 e le 13.30.

Calcolare la probabilità che una persona debba aspettare almeno un quarto d'ora durante tale periodo.

La v.c. X che indica "tempo mancante al prossimo autobus" segue un modello uniforme.

$$P[X \geq 15] = 1 - P[X < 15] = 1 - P[X \leq 15] = 1 - F(15)$$

Poichè

$$F(x) = P[a \leq X \leq x] = \int_a^x \frac{1}{b-a}\, dt = \frac{x-a}{b-a}$$

$b - a = 60\,\text{min} - 0\,\text{min}$.

$$F(15) = \frac{15-0}{60-0} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P[X \geq 15] = \frac{3}{4}$$

DISTRIBUZIONE NORMALE O GAUSSIANA

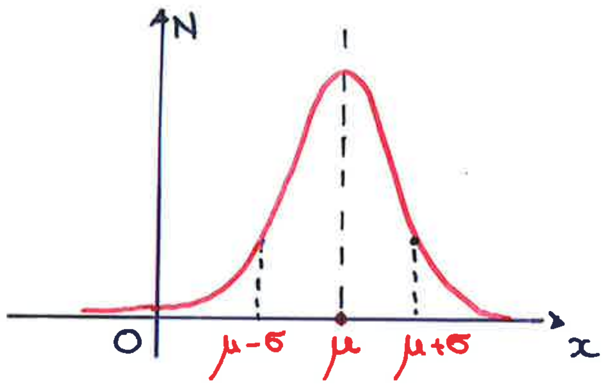
È la distribuzione di probabilità continua più importante. Descrive molti fenomeni che si verificano in natura, si usa per misurazioni fisiche e approssima molto bene gli errori di misurazione. Gioca un ruolo fondamentale in statistica ed è il cardine del teorema del limite centrale.

Una v.c. continua X è normale se:

$$N(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

con $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

- $E[X] = \mu$
- $var[X] = \sigma^2$



PROPRIETÀ

1) N è simmetrica rispetto alla retta $x = \mu$ (mediana = media)

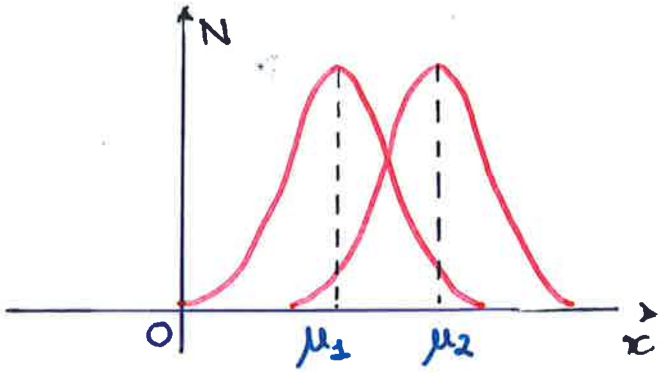
2) N ha un punto di max in $x = \mu$ (moda = media)

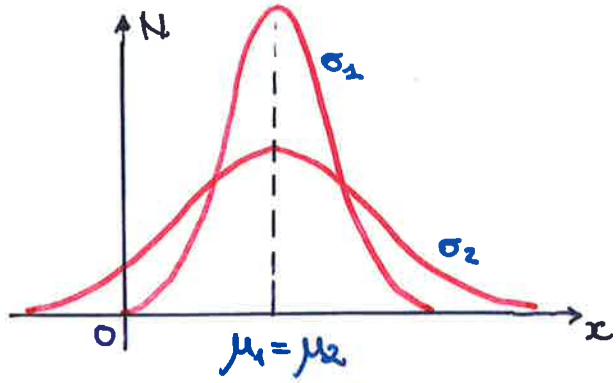
3) N ha due punti di flesso in $x = \mu \pm \sigma$

4) $\lim_{x \to \pm\infty} N(x, \mu, \sigma) = 0$

5) modificare il valore di μ equivale a traslare su Ox il grafico di N senza deformarlo

6) cambiare il valore di σ equivale a modificare la forma del grafico di N senza traslarlo.





Poiché è impossibile riportare in tabella i valori di porzioni di area al di sotto della curva per ogni valore di μ e di σ si trasforma ogni v.c. normale X in una v.c. normale Z avente media nulla e varianza unitaria.

DEFINIZIONE: Una variabile casuale normale con $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ è detta NORMALE STANDARD o RIDOTTA.

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$E[Z] = E\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma} E[X-\mu] = \frac{1}{\sigma}\{E[X] - E[\mu]\} = \frac{1}{\sigma}(\mu - \mu) \equiv 0$$

$$var[Z] = var\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma^2} var[X-\mu] = \frac{1}{\sigma^2} var[X] = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} \equiv 1$$

La funzione di densità di una v.c. normale standard Z è:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

indipendente da μ e da σ.

La sua funzione di ripartizione è:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(t)\,dt$$

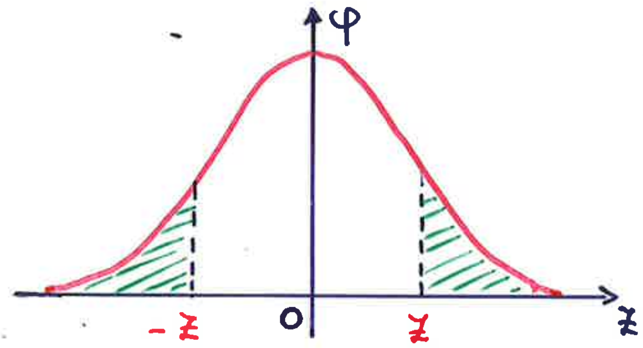
PROPRIETÀ

- $P[a \leq X \leq b] = P\left[\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

- $P[X \geq a] = 1 - P[X<a] = 1 - P\left[Z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right] = 1 - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

(ricordo che per le proprietà della funzione di ripartizione $\Phi(-\infty) = 0$ e $\Phi(+\infty) = 1$)

- $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$



$P[Z<-z] = \Phi(-z)$

ma

$P[Z<-z] = P[Z>z] = 1 - P[Z \leq z] = 1 - \Phi(z)$

Esempio

Il peso di 2 confezioni è una v.c. normale X con media $\mu = 250$ g e deviazione standard $\sigma = 3$ g. Calcolare la probabilità che il peso sia minore di 245 g.

$X \sim N(250, 3) \longrightarrow Z = \frac{X-250}{3}$

$P[X<245] = P\left[Z < \frac{245-250}{3}\right] = P\left[Z < -\frac{5}{3}\right]$

$= 1 - P\left[Z < \frac{5}{3}\right] = 1 - \Phi(1.67)$ DALLA TABELLA

$= 1 - 0.9525 = 0.0475$

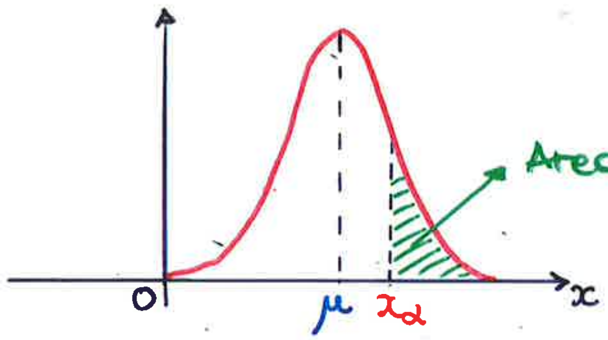
PROBLEMA INVERSO

Fino ad ora conoscevamo il valore di ascissa z (o x) e calcolavamo l'area sottesa dalla curva, cioè valutavamo la funzione di ripartizione in z.

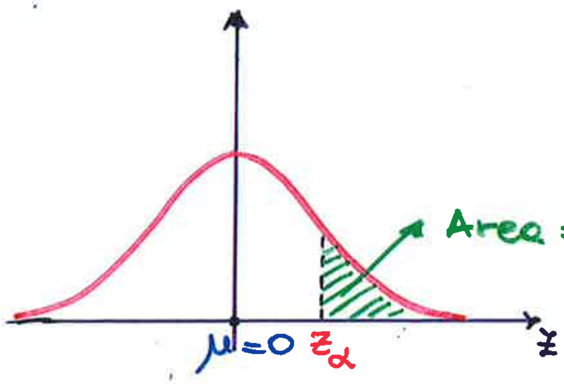
In alcuni casi invece il dato a disposizione è una determinata probabilità (area) di cui si vuole conoscere il corrispondente valore di percentile.

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Dato $\alpha \in (0,1)$ determinare x_α tale che $P[X > x_\alpha] = \alpha$



Dato $\alpha \in (0,1)$ determinare z_α tale che $P[Z > z_\alpha] = \alpha$



Esempio

Sia X v.c. normale $N(19, 49)$ cioè $\mu = 19$ e $\sigma = 7$.

Determinare il valore x_α tale che:

$$P[X > x_\alpha] = 20\%$$

$$0.20 = P[X > x_\alpha] = P\Big[Z > \underbrace{\frac{x_\alpha - 19}{7}}_{= z_\alpha}\Big] = P[Z > z_\alpha]$$

$$= 1 - P[Z \leq z_\alpha]$$

quindi

$P[Z \leq z_\alpha] = 0.80$

Dalla tabella della $\varphi(z)$ non troviamo esattamente 0.80 ma:

$0.7995 \rightarrow z = 0.84$

$0.8023 \rightarrow z = 0.85$

Scriviamo l'equazione della retta passante per due punti:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

e cerchiamo il valore di $\bar{x}$ che corrisponde ad $\bar{y} = 0.80$.

$$\frac{0.8 - 0.7995}{0.8023 - 0.7995} = \frac{\bar{x} - 0.84}{0.85 - 0.84} \Rightarrow \bar{x} = 0,84178$$

Allora il valore cercato è $z_\alpha = 0,84178$

Poichè $z_\alpha = \dfrac{x_\alpha - 19}{7}$ si ricava $x_\alpha = 24,8925$

Un'approssimazione più rozza si ottiene calcolando la media tra 0.84 e 0.85, cioè $z_\alpha = 0,845$ da cui si ha $x_\alpha = 24,915$.

VALORI TABULATI

- $P[Z \geq z_\alpha] = 1\% = 0.01 \Rightarrow z_\alpha \approx 2.326$
- $P[Z \geq z_\alpha] = 5\% = 0.05 \Rightarrow z_\alpha \approx 1.645$
- $P[Z \geq z_\alpha] = 2,5\% = 0.025 \Rightarrow z_\alpha = 1.96$

Esempi

1) $P[Z < z_\alpha] = 0.9953$

Dalle tavole $z_\alpha = 2.6$

2) $P[Z > z_\alpha] = 0.2743$

$P[Z > z_\alpha] = 1 - P[Z \leq z_\alpha]$

$\Rightarrow P[Z \leq z_\alpha] = 1 - 0.2743 = 0.7257$

Dalle tavole $z_\alpha = 0.6$

3) $P[0 \leq Z \leq z_\alpha] = 0.377$

$P[0 \leq Z \leq z_\alpha] = P[Z \leq z_\alpha] - 0.5$

$(0.5 = P[-\infty < Z < 0])$

$\Rightarrow P[Z \leq z_\alpha] = 0.377 + 0.5 = 0.877$

Dalle tavole $z_\alpha = 1.16$

4) $P[|Z| \leq z_\alpha] = 0.5762$

$$\begin{aligned} P[|Z| \leq z_\alpha] &= P[-z_\alpha \leq Z \leq z_\alpha] = 2P[0 \leq Z \leq z_\alpha] \\ &= 2[P[Z \leq z_\alpha] - 0.5] \\ &= 2P[Z \leq z_\alpha] - 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow P[Z \leq z_\alpha] = \dfrac{0.5762 + 1}{2} = 0.7881$

Dalle tavole $z_\alpha = 0.8$

5) $P[z_\alpha < Z < 1.6] = 0.7865$

$P[z_\alpha < Z < 1.6] = P[Z < 1.6] - P[Z < z_\alpha]$

Dalle tavole $P[Z < 1.6] = 0.9452$

$\Rightarrow P[Z < z_\alpha] = 0.9452 - 0.7865 = 0.1587 < 0.5$!!!

$\Rightarrow$ z_α È NEGATIVO

Cerco il valore z_α^* positivo, simmetrico (a destra dell'origine) tale che

$$P[Z > z_\alpha^*] = 0.1587$$

$P[Z > z_\alpha^*] = 1 - P[Z \leq z_\alpha^*]$

$\Rightarrow P[Z \leq z_\alpha^*] = 1 - 0.1587 = 0.8413$

Dalle tavole $z_\alpha^* = 1 \Rightarrow z_\alpha = -1$.

Esercizi

1) La potenza W dissipata da una resistenza è proporzionale al quadrato della differenza di potenziale V $(V>0)$ ai suoi capi, cioè $W = kV^2$, k costante

Calcolare $E[W]$ e $P[W > 120]$ se $k=3$ e $V \sim N(6,1)$.

- $E[W] = E[3V^2] = 3E[V^2]$

ma $\forall$ X v.c.

$var[X] = E[X^2] - E[X]^2$

quindi

$E[V^2] = var[V] + E[V]^2 = 1 + 36 = 37$

$\Rightarrow E[W] = 111$

- $P[W > 120] = P[V^2 > 40] = P[V > 2\sqrt{10}]$

$Z = \frac{V - \mu_V}{\sigma_V} = V - 6$

$P[V > 2\sqrt{10}] = P[Z > 2\sqrt{10} - 6] \simeq P[Z > 0.3246] \stackrel{(\bullet)}{=}$

0.3246 non c'è nelle tavole ma:

$0.32 \to$ area $= 0.62552$

$0.33 \to$ area $= 0.62930$

$0.3246 \approx 0.325 \Rightarrow$ faccio la media tra le aree ottenendo 0.62741

$\stackrel{(\bullet)}{=} 1 - P[Z < 0.3246] \simeq 1 - 0.62741 = 0.37259$

2) Una macchina produce resistori elettrici che devono avere una resistenza media di 40 ohm e una deviazione standard di 2 ohm. Se la resistenza si distribuisce come una normale, qual è la percentuale di resistori che avranno una resistenza superiore ai 43 ohm?

Per trovare la percentuale si moltiplica per 100% la frequenza relativa. La frequenza relativa, nel caso di un intervallo è pari alla probabilità di osservare un valore qualunque all'interno dell'intervallo.

$X \sim N(40, 2)$

$Z = \frac{X-40}{2}$

$$P[X>43] = P[Z > \frac{43-40}{2}] = P[Z>1.5] = 1-P[Z<1.5]$$

$$= 1 - 0.9332 = 0.0668$$

$\Rightarrow$ la percentuale è pari al 6,68%.

- Determinare la percentuale di resistenze che superano 43 ohm se la resistenza è misurata all'ohm più vicino.

Questo problema è diverso dal precedente perchè si assegna una misura di 43 ohm ai resistori le cui resistenze sono > 42.5 e < 43.5.

$$P[X>43.5] = P[Z > \frac{43.5-40}{2}] = P[Z>1.75]$$

$$= 1 - P[Z<1.75] = 1 - 0.9599 = 0,0401$$

$\Rightarrow$ la percentuale è pari al 4,01%, cioè il 4,01% delle resistenze supera 43 ohm quando misurate all'ohm più vicino.

La differenza 6.68% − 4.01% = 2.67% rappresenta tutti i valori di resistenza > 43 ohm e < 43.5 che vengono misurati come 43ohm

APPROSSIMAZIONI

La distribuzione normale risulta spesso una buona approssimazione di una distribuzione discreta quando quest'ultima dimostra di avere una forma simmetrica a campana.

$$X \sim B(x;\ \mu = np,\ \sigma^2 = npq) \xrightarrow[\substack{n \to \infty \\ p \to 0}]{} N(x; \mu, \sigma^2) \longrightarrow N(0,1)$$

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

$$E[X_N] = E[X_B] \Rightarrow \mu = np$$

$$var[X_N] = var[X_B] \Rightarrow \sigma^2 = npq$$

Basta che $\boxed{npq \geq 10}$ (altri testi indicano $np \geq 5$ e $nq \geq 5$) perché l'approssimazione sia buona.

$$X \sim P(x; \lambda) \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} N(x; \mu, \sigma^2) \to N(0,1)$$

$$Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

$$E[X_N] = E[X_P] \Rightarrow \mu = \lambda$$

$$var[X_N] = var[X_P] \Rightarrow \sigma^2 = \lambda$$

Basta che $\boxed{\lambda \geq 10}$.

OSSERVAZIONE

Quando si approssima una distribuzione discreta con una distribuzione continua di solito si applica la correzione di continuità, cioè si modifica l'intervallo di integrazione ampliando di 0.5 gli estremi dell'intervallo su cui si integra la continua per approssimare la discreta, ottenendo così una approssimazione migliore.

Esempi

1) Un test a scelta multipla è composto da 200 quesiti, ognuno dei quali ha 4 possibili risposte di cui solo una è corretta. Sapendo che lo studente non conosce le risposte, qual è la probabilità che le risposte corrette siano tra 25 e 30, se risponde a 80 quesiti su 200.

$X \sim B(n=80,\ p=\frac{1}{4})$

$$P[25 \leq X \leq 30] = P[X=25] + \dots + P[X=30]$$
$$= \sum_{x=25}^{30} \binom{80}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{80-x}$$

$npq = 80 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = 15 \ (>10)$

Posso approssimare con la normale

$\mu = np = 20$

$\sigma^2 = npq = 15 \quad \Rightarrow \sigma = 3.873$

$\Rightarrow X \sim N(20, 15)$

Applicando la correzione di continuità l'intervallo diventa $(24.5,\ 30.5)$.

$$P[24.5 \leq X \leq 30.5] = P\left[\frac{24.5-20}{3.873} < Z < \frac{30.5-20}{3.873}\right]$$
$$= P[1.16 < Z < 2.71]$$
$$= \Phi(2.71) - \Phi(1.16)$$
$$= 0.9966 - 0.8770 = 0.1196$$

2) La probabilità che un individuo guarisca da una malattia rara è 0.4. Se 100 persone hanno contratto la malattia, qual è la probabilità che meno di 30 sopravvivano?

$n = 100 \quad p = 0.4 \quad q = 0.6 \quad npq = 24 > 10.$

$\mu = 40 \quad \sigma^2 = 24 \quad \sigma = 4.899$

con la binomiale

$$P[0 \leq X < 30] = P[0 \leq X \leq 29] = \sum_{x=0}^{29} \binom{100}{x} (0.4)^x (0.6)^{100-x}$$

con la normale, applicando la correzione di continuità

$$P[-0.5 < X < 29.5] = P\left[\frac{-0.5-40}{4.899} < Z < \frac{29.5-40}{4.899}\right]$$

$$= P[-8.26 < Z < -2.14]$$

$$= P[2.14 < Z < 8.26]$$

$$= \Phi(8.26) - \Phi(2.14)$$

$$= 1 - 0.9838 = 0.0162$$

N.B. Per qualunque variabile casuale discreta X:

$$P[X \leq x] = P[X \leq x + \tfrac{1}{2}]$$

$$P[x \leq X \leq y] = P[X \leq y + \tfrac{1}{2}] - P[X \leq x - \tfrac{1}{2}]$$

DISTRIBUZIONE GAMMA

Il suo nome deriva dalla funzione gamma di Eulero così definita:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \, dx \quad , \alpha > 0$$

che soddisfa le condizioni:

$\Gamma(n) = (n-1)!$

$\Gamma(1) = 1$

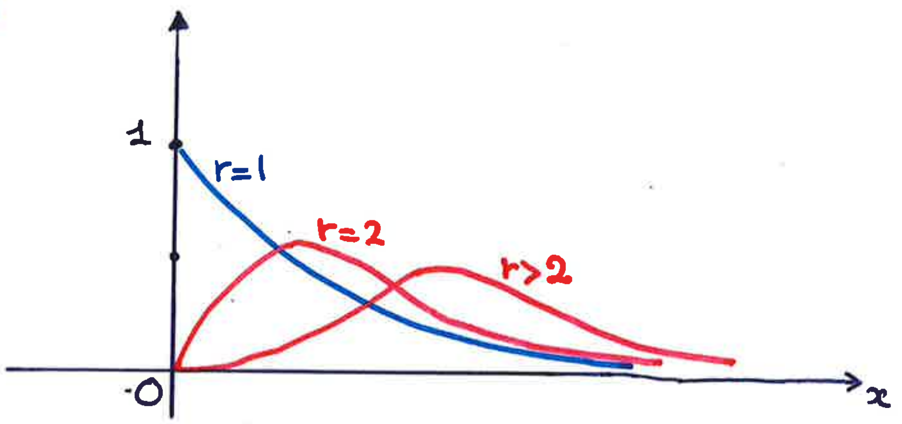
$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

La variabile casuale continua X ha una distribuzione gamma di parametri r e λ se la sua funzione di densità è data da:

$$f(x; r, \lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

con $r > 0$ e $\lambda > 0$.

- $E[X] = \frac{r}{\lambda}$
- $var[X] = \frac{r}{\lambda^2}$



Se $r = 1$ la densità gamma è la densità esponenziale.

DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE

Viene utilizzata nei problemi di affidabilità, nel modellare la durata della vita di un componente, il tempo al verificarsi di un guasto di sistemi elettronici.
Una variabile casuale continua X è detta esponenziale se la funzione di densità è:

$$\exp(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

con $\lambda > 0$.

- $E[X] = \frac{1}{\lambda}$
- $var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$
- $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \quad (\lambda > 0). \\ 0 & , \text{altrove} \end{cases}$

PROPRIETÀ: ASSENZA DI MEMORIA

Il tempo di vita di un componente è una v.c. esponenziale.
Finché il componente funziona, si comporta come se fosse nuovo, cioè l'usura dovuta al funzionamento nelle prime t ore iniziali non influenza la durata successiva di $(t+s)$ ore, cioè:

$$P[X > s+t \mid X > t] = P[X > s]$$

$$P[X>s+t \mid X>t] = \frac{P[X>s+t,\ X>t]}{P[X>t]} = \frac{P[X>s+t]}{P[X>t]}$$

$$= \frac{1 - P[X \leq s+t]}{1 - P[X \leq t]} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P[X>s]$$

Esempi

1) La variabile casuale T, che descrive il tempo che deve trascorrere (in anni) perché un componente si guasti è una v.c. esponenziale con media pari a 5.

Se 5 componenti vengono installati contemporaneamente, qual è la probabilità che almeno 2 siano funzionanti alla fine dell'8° anno?

$$E[T] = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5}$$

$$P[T>8] = \int_{8}^{+\infty} \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x} dx = -\left(e^{-1/5 x}\right)_8^{\infty} = e^{\frac{8}{5}} \approx 0.2$$

rappresenta la probabilità che il componente funzioni dopo 8 anni.

Con la binomiale:

$$P[X \geq 2] = 1 - P[X<2] = 1 - P[X=0] - P[X=1]$$

$$= 1 - \binom{5}{0}(0.2)^0(0.8)^5 - \binom{5}{1}(0.2)^1 \cdot (0.8)^4$$

$$= 1 - (0.8)^5 - (0.8)^4 = 1 - 0.73728 = 0.2627.$$

2) Il tempo (in anni) che trascorre prima che una lavatrice necessiti di una riparazione è una v.c. esponenziale di parametro $\lambda = 1/4$.

Calcolare la probabilità che sia necessaria una riparazione nel 1° anno e prima del 6° anno.

$$P[X \leq 1] = \left[1 - e^{-\lambda x}\right]_{x=1, \lambda=\frac{1}{4}} = 1 - e^{-1/4} = 0.221.$$

$$P[X \leq 6] = \left[1 - e^{-\lambda x}\right]_{x=6, \lambda=\frac{1}{4}} = 1 - e^{-\frac{3}{2}} = 0.777 \text{ (alta!)}$$

$\Rightarrow$ il prodotto non è vantaggioso

DISTRIBUZIONE χ^2 (CHI-QUADRO)

E' un caso speciale della distribuzione gamma, per $\lambda = \frac{1}{2}$ ed $\alpha = \frac{\nu}{2}$ dove $\nu \in \mathbb{N}$ è chiamato gradi di libertà. Ha un ruolo fondamentale nell' inferenza statistica. La v. casuale χ^2 ha come funzione di densità:

$$\chi^2(x, \nu) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & , x \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- $E[X] = \nu$
- $var[X] = 2\nu$

(grafico → vedi la densità gamma).

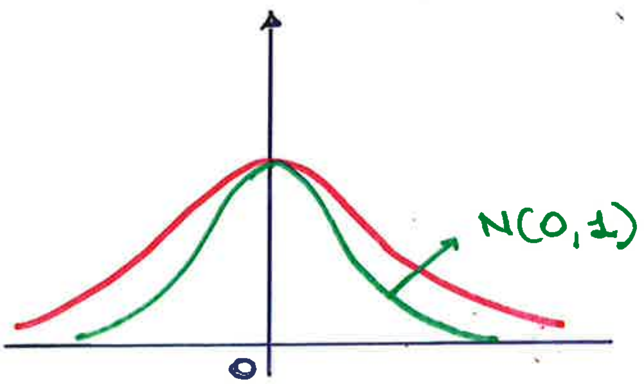
DISTRIBUZIONE DI STUDENT t

E' simile alla normale standard, ma ha le code più pesanti. Interviene nella stima della media di una popolazione caratterizzata da una distribuzione normale. La v.c. t di Student ha la seguente funzione di densità:

$$t(x; \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi \nu}} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \quad , x \in \mathbb{R}$$

con $\nu \in \mathbb{N}$ chiamato gradi di libertà.

- $E[X] = 0$ se $\nu > 1$
- $var[X] = \frac{\nu}{\nu - 2}$ se $\nu > 2$



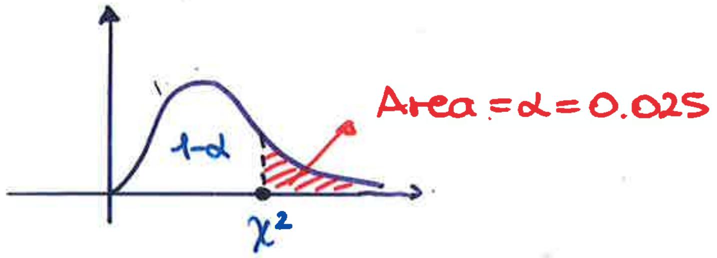
Esercizi

1) Calcolare il percentile della χ^2 per $\nu = 5$ tale che:

$$P[\chi^2 > x^2_{5;0.025}] = 0.025$$

- $\chi^2_{5,\,0.025} = 12.83249$

$1-\alpha = 0.975$



2) Calcolare

$$P[\chi^2 > 6.25139] \quad \text{se } \nu = 3.$$

per $\nu = 3$ 6.25139 corrisponde ad $(1-\alpha) = 0.9$

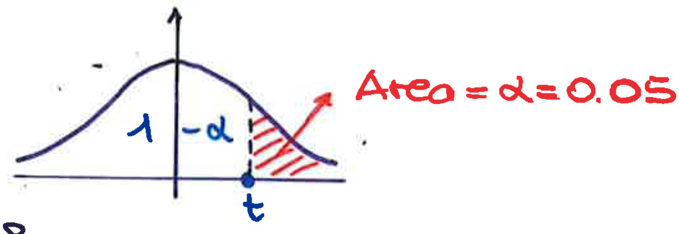
quindi $\alpha = 0.1$, $\chi^2_{3;0.1} = 6.25139$ e

$$P[\chi^2 > x^2_{3;0.1}] = 0.1$$

3) Calcolare il percentile della t di Student tale che

per $\nu = 24$ $\quad P[T > t_{24;0.05}] = 0.05.$

$1-\alpha = 0.95$



- $t_{24;0.05} = 1.71088$

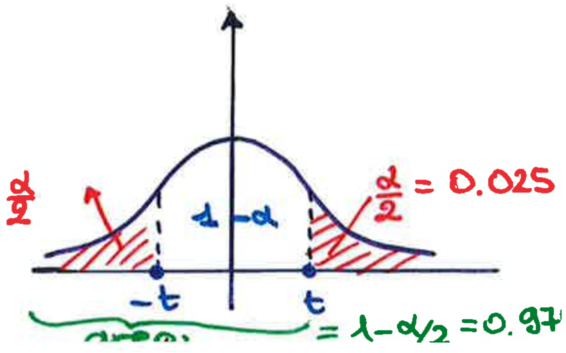
4) Calcolare il percentile della t di Student tale che per $\nu = 24$

$$P[|T| > t_{24;0,05}] = 0.05$$

$P[|T| < t_{24;0.05}] = 1-0.05 = 0.95$

$\parallel$

$P[|T| < t_{24;0.025}]$



- $t_{24;0.025} = 2.06390$

OSSERVAZIONE

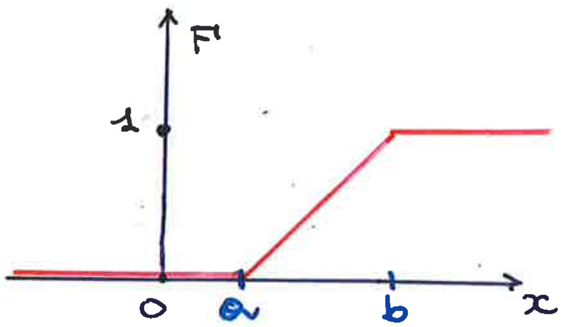
La **MEDIANA** di una variabile continua è quel valore m tale che la funzione di ripartizione $F(m)=\frac{1}{2}$.

Esempi

1) $X \sim Unif[a,b]$

$$f(x)=\frac{1}{b-a} \quad , \; a\le x\le b$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<a \\ \frac{x-a}{b-a} & a\le x<b \\ 1 & x\ge b \end{cases}$$



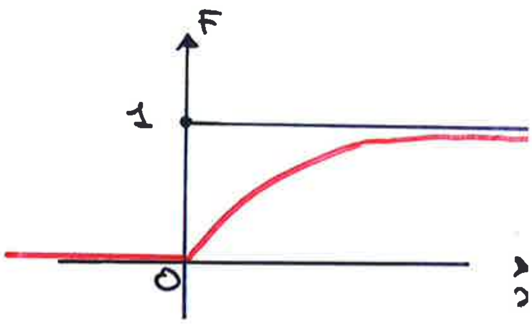
$$F(m)=\frac{m-a}{b-a}$$

$$F(m)=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{m-a}{b-a}=\frac{1}{2} \Rightarrow m=\frac{a+b}{2}$$

2) $X \sim exp(\lambda)$

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x} \quad , \; x\ge 0 \quad (\lambda>0)$$

$$F(x)=\begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & , \; x\ge 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$$F(m)=1-e^{-\lambda m}$$

$$F(m)=\frac{1}{2} \Rightarrow 1-e^{-\lambda m}=\frac{1}{2} \Rightarrow e^{-\lambda m}=\frac{1}{2}$$

$$\ln_e e^{-\lambda m}=\ln_e \frac{1}{2}$$

$$-\lambda m=-\ln 2 \qquad\qquad \ln_e e=1 \quad \ln_e 1=0$$

$$m=\frac{\ln 2}{\lambda}$$