STIMA PER INTERVALLI

Anche se la precisione della stima aumenta con grandi campioni, non è vero che una stima puntuale, valore specifico di una statistica calcolata in corrispondenza di un dato campione, sia esattamente uguale al parametro della popolazione che si intende stimare.

A volte è preferibile determinare un intervallo per il quale si ha un certo livello di fiducia o confidenza che il parametro vi appartenga.

Quindi una stima per intervallo è un intervallo costruito attorno allo stimatore puntuale (di cui si conosce la distribuzione di probabilità) in modo che sia nota e fissata a priori la probabilità che il parametro vero appartenga all'intervallo stesso.

Tale probabilità è detta LIVELLO DI CONFIDENZA e viene indicato con $(1-\alpha)\%$ dove $\alpha \in (0,1)$ è la probabilità che il parametro si trovi al di fuori dell'intervallo di confidenza.

Nel caso di un c.c. semplice di dim $= n$, estratto da una popolazione normale $N(\mu, \sigma^2)$ si possono costruire intervalli di confidenza al livello $(1-\alpha)\%$ sia per la media μ (con σ nota o incognita) sia per la varianza σ^2 (con μ nota o incognita).

1) INTERVALLO DI CONFIDENZA PER LA MEDIA μ QUANDO LA VARIANZA σ^2 È NOTA

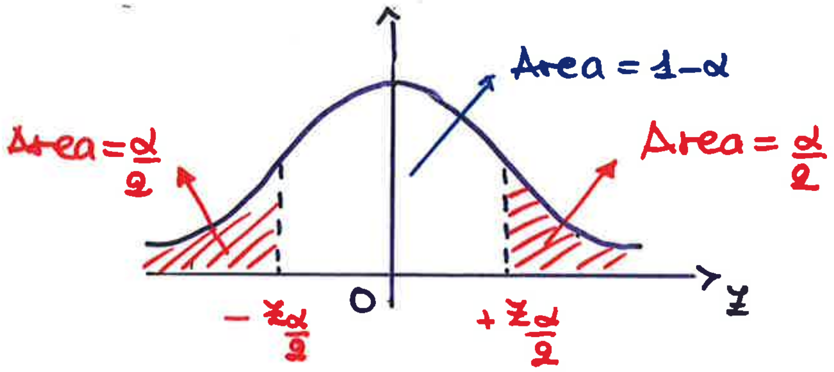
$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \quad i=1,\dots,n \quad \Rightarrow \bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

La variabile casuale

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

è indipendente da μ e quindi è la statistica idonea per costruire l'intervallo per μ, essendo σ nota.
Si possono costruire intervalli bilaterali e unilaterali: destro e sinistro.

INTERVALLO BILATERALE



$\forall \alpha \in (0,1) \quad z_{\frac{\alpha}{2}} : P\left[Z_n > z_{\frac{\alpha}{2}}\right] = \frac{\alpha}{2}$

$$\Rightarrow \quad P\left[-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z_n < +z_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

sostituendo $Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

$$P\left[-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

ovvero

$$P\left[\bar{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

$\Rightarrow I = \left(\bar{x}_n - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ intervallo di confidenza bil. al livello $(1-\alpha)$ per μ.

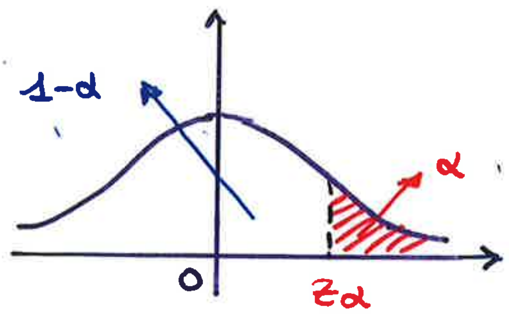
La lunghezza dell'intervallo bilaterale è:

$$\ell_I = 2 z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- se n aumenta, ℓ_I cala $\Rightarrow$ stima più precisa
- se $(1-\alpha)$ aumenta, $z_{\frac{\alpha}{2}}$ aumenta, ℓ_I aumenta $\Rightarrow$ stima è meno precisa
- se σ aumenta, ℓ_I aumenta

(n, α) si possono controllare, σ dipende dai dati.

INTERVALLI UNILATERALI



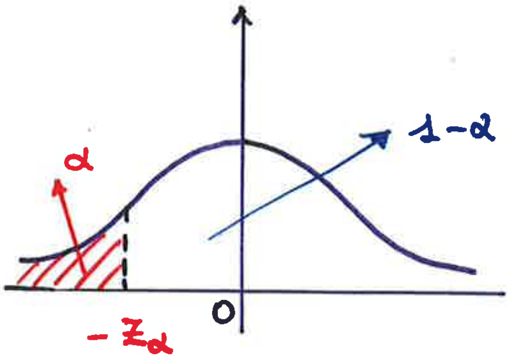
z_α: $P[Z_n > z_\alpha] = \alpha$

$\Downarrow$

$P[Z_n < z_\alpha] = 1-\alpha$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_\alpha \Rightarrow \mu > \bar{X}_n - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\Rightarrow \left(\bar{x}_n - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty\right)$ intervallo unilaterale destro per μ al livello $(1-\alpha)$.



$$P[Z_n < -z_\alpha] = \alpha$$
$$\Downarrow$$
$$P[Z_n > -z_\alpha] = 1-\alpha$$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > -z_\alpha \Rightarrow \mu < \bar{X}_n + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\Rightarrow \left(-\infty, \bar{x}_n + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ intervallo unilaterale sinistro per μ al livello $(1-\alpha)$.

OSSERVAZIONE

Se viene a mancare l'ipotesi che la distribuzione della popolazione sia normale, a condizione che n, la dimensione del campione, sia sufficientemente grande, in accordo con il Teorema del Limite Centrale ($n \geq 30$)

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{\cdot}{\sim} N(0,1)$$

e si possono costruire ugualmente gli intervalli di confidenza.

Esempio

Vogliamo calcolare

$$P[-1.96 < Z_n < 1.96] = \int_{-1.96}^{1.96} \varphi(z)dz = 2\int_0^{1.96} \varphi(z)dz$$
$$= 2\left[\int_{-\infty}^{1.96} \varphi(z)dz - 0.5\right]$$
$$= 2\,[0.975 - 0.5]$$

Tabella

$$= 2 \cdot 0.475 = 0.95$$

è equivalente a:

$$P\left[\bar{X}_n - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}_n + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right](= 1-\alpha) = 0.95$$

intervallo di conf. bilat. al 95%.

Il 95% delle volte μ si troverà ad una distanza non superiore a $\left(1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ dalla media campionaria dei dati.

Posso concludere che col 95% di confidenza la media μ della popolazione appartiene ad

$$I = \left(\bar{x}_n - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}_n + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$(1-\alpha) = 0.95$

$\alpha = 0.05$, $\frac{\alpha}{2} = 0.025$

$1.96 = z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025}$

Voglio calcolare:

$$P[Z_n < 1.645] = \int_{-\infty}^{1.645} \varphi(z)\,dz = 0.95$$

$\uparrow$ Tabella

è equivalente a:

$$P\left[\bar{X}_n - 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu\right] = 0.95$$

intervallo di conf. unilat. dx al 95%, cioè:

$$I = \left(\bar{x}_n - 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ +\infty\right)$$

$(1-\alpha) = 0.95$

$\alpha = 0.05$

$z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$

intervallo di conf. unilat. sx al 95% sarà:

$$I = \left(-\infty,\ \bar{x}_n + 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

LIVELLI DI CONFIDENZA COMUNI

- $1-\alpha = 90\% \Rightarrow \alpha = 0.1$ $\begin{cases} z_\alpha = z_{0.1} = 1.28 \\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.05} = 1.645 \end{cases}$

- $1-\alpha = 95\% \Rightarrow \alpha = 0.05$ $\begin{cases} z_\alpha = z_{0.05} = 1.645 \\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96 \end{cases}$

- $1-\alpha = 99\% \Rightarrow \alpha = 0.01$ $\begin{cases} z_\alpha = z_{0.01} = 2.326 \\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.005} = 2.58 \end{cases}$

OSSERVAZIONE

Ci possono essere diversi intervalli di confidenza bilaterali che hanno lo stesso livello di confidenza.

$P[-1.96 < Z_m < 1.96] = 0.95$

ma anche

$P[-1.68 < Z_m < 2.70] = 0.95$

Problema: quale intervallo è migliore?

Si sceglie l'intervallo più corto.

Si può dimostrare che l'intervallo simmetrico rispetto ad $\overline{X}_m$ è quello che rende minima l'ampiezza di I_{bil}.

Esempio

Dato un c.c. di dim = 4 estratto da una popolazione normale $N(\mu, \sigma = 3)$

DATI : 1.2 3.4 0.6 5.6

$\bar{x}_n = \bar{x}_4 = 2.7$ è la stima per μ.

L' intervallo bilat. simmetrico al 95% per μ è:

$$\left(2.7 - 1.96 \cdot \frac{3}{2} \,,\, 2.7 + 1.96 \cdot \frac{3}{2}\right) = (-0.24 \,,\, 5.64)$$

e $\ell_I = 5.88$

Se usiamo $P[-1.68 < Z_n < 2.70] = 0.95$

ricaviamo:

$$\left(2.7 - 2.7 \cdot \frac{3}{2} \,;\, 2.7 + 1.68 \cdot \frac{3}{2}\right) = (-1.35 \,,\, 5.22)$$

e $\ell_I = 6.57$ più ampio.

Gli intervalli unilaterali in corrispondenza a $z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$ saranno

$(0.23, +\infty)$ dx e $(-\infty, 5.16)$ sx.

In alcune situazioni si richiede che l'intervallo di confidenza bilaterale abbia una lunghezza fissata.

Problema: determinare la numerosità del campione che garantisca il risultato richiesto.

Da $\ell_I = 2\, z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies n = \left(2\, z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma / \ell_I\right)^2$

(si approssima all'intero successivo).

<u>Esempio</u>

Dato un c.c. estratto da una popolazione normale $N(\mu, \sigma = 0.2)$ calcolare n affinché l'int. di confidenza bilat. al 99% per μ abbia lunghezza $\ell_I = 0.1$

$1 - \alpha = 0.99$

$\alpha = 0.01 \,,\quad \frac{\alpha}{2} = 0.005 \,,\quad z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.005} = 2.58$

$$\ell_I = 2 \cdot z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot 2.58 \cdot \frac{0.2}{\sqrt{n}}$$

$\implies n = (5.16 \cdot 0.2)^2 \simeq 106.5 \implies n = 107.$

② INTERVALLO DI CONFIDENZA PER LA MEDIA μ QUANDO LA VARIANZA σ^2 NON È NOTA

Non è ora più possibile usare la v.c. $Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ poichè contiene l'incognita σ e quindi non è una statistica.
Bisogna usare la statistica

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1} \quad \text{(TH. 5)}$$

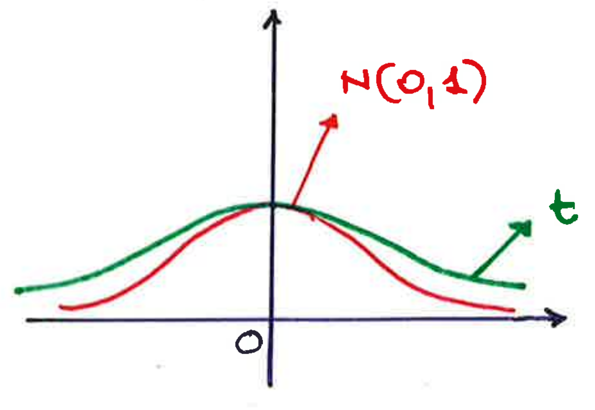
In analogia al caso ① si costruiscono gli intervalli di confidenza bilat. e unilat. dx e sx al livello $(1-\alpha)\%$, $\forall \alpha \in (0,1)$ sostituendo alla deviazione standard σ della popolazione la deviazione campionaria standard S e ai percentili della normale standard Z, i percentili della t di Student al grado di libertà $(n-1)$.

$$I = \left(\bar{x}_n - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}, \ \bar{x}_n + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$ INTERVALLO BILAT.

$$\left(\bar{x}_n - t_{\alpha, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}, \ +\infty\right)$$ INTERVALLO UNILAT DX

$$\left(-\infty, \ \bar{x}_n + t_{\alpha, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$ INTERVALLO UNILAT SX

Quando σ non è nota, l'intervallo costruito attraverso t è più amplo poichè le code della t sono più pesanti.



Esempio

Dato un c.c. di dim $m=4$ estratto da una popolazione normale $N(\mu, \sigma^2)$. Determinare un int. di conf. al 95% per μ. (bilat.)

DATI : 1.2 3.4 0.6 5.6

$$\bar{x}_m = \bar{x}_4 = 2.7$$

$$s^2 = \frac{1}{(m-1)} \left[\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - m\, \bar{x}_m^2 \right]$$

$$\Downarrow$$

$$s^2 = \frac{1}{3} \left[(1.2)^2 + (3.4)^2 + (0.6)^2 + (5.6)^2 - 4 \cdot (2.7)^2 \right]$$

$$\Downarrow$$

$$s \approx 2.277$$

$$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}, m-1} = t_{0.025, 3} = 3.182$$

↑TABELLA

$$l_I = 2\, t_{\frac{\alpha}{2}, m-1} \frac{s}{\sqrt{m}} \Rightarrow l_I = 2 \cdot 3{,}182 \cdot \frac{2.277}{\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow l_I = 7.10$ (più ampio rispetto a 5.88 calcolato quando σ è nota)

OSSERVAZIONE

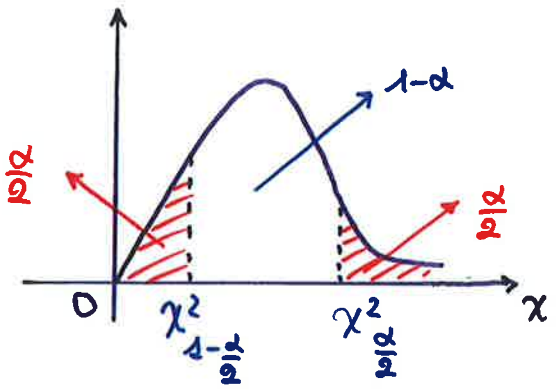
Nella pratica si costruiscono gli intervalli di confidenza per μ quando σ non è nota per mezzo della T di Student solo per piccoli campioni ($m \leq 30$). Per grandi campioni si usa invece la normale standard Z_m sostituendo alla σ incognita la s calcolata dai dati.

③ INTERVALLI DI CONFIDENZA PER LA VARIANZA σ^2 QUANDO LA MEDIA μ NON È NOTA

Una stima per σ^2 può essere determinata usando la statistica

$$V = (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \quad (\text{TH. }4)$$

INTERVALLO BILATERALE



$$P\left[\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} < V < \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right] = 1-\alpha$$

sostituendo V si ha:

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$$

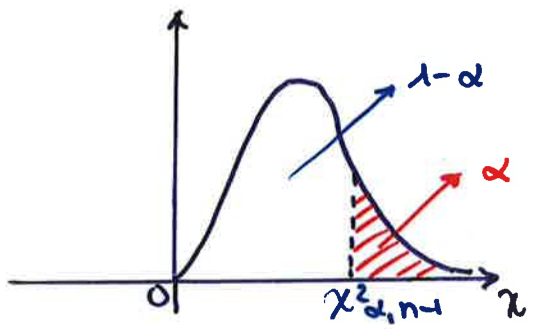
cioè

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}$$

$\Rightarrow$

$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right)$ intervallo bilaterale per σ^2 quando μ non è nota

INTERVALLI UNILATERALI



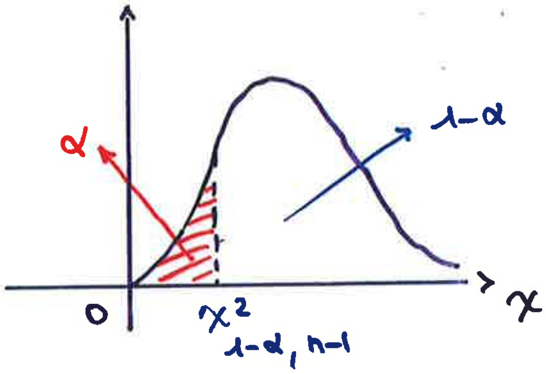
$$P\left[0 < V < \chi^2_{\alpha,n-1}\right] = 1-\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$0 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha,n-1}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma^2 > (n-1)\frac{S^2}{\chi^2_{\alpha, n-1}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha, n-1}}, +\infty \right)$$ intervallo unilaterale destro per σ^2



$$P\left[V > \chi^2_{1-\alpha, n-1} \right] = 1-\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{1-\alpha, n-1}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma^2 < (n-1)\frac{S^2}{\chi^2_{1-\alpha, n-1}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(0, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha, n-1}} \right)$$ intervallo unilaterale sinistro per σ^2

Esempio

Dato un c.c. di dim=10 di rondelle di spessore ridotto estratto da una produzione normale $N(\mu, \sigma^2)$. Stimare σ^2 con μ non nota

DATI: spessori

0.123	0.133	0.124	0.125	0.126
0.128	0.120	0.124	0.130	0.126

$$\Rightarrow \quad \bar{x}_n = \bar{x}_{10} = 0.125$$

$$s^2 = \frac{1}{9}\left\{ \left[(0.123)^2 + (0.133)^2 + \dots + (0.126)^2 \right] - 10 \cdot (0.125)^2 \right\}$$

$$\simeq 1.366 \cdot 10^{-5}$$

Vogliamo determinare un intervallo di confidenza bilaterale per σ^2 al 90%.

$1-\alpha = 0.90$, $\alpha = 0.1$ $\Rightarrow$ $\frac{\alpha}{2} = 0.05$ $\quad 1-\frac{\alpha}{2} = 0.95$

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = \chi^2_{0.05, 9} = 16.919$$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} = \chi^2_{0.95, 9} = 3.325$$

quindi

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}$$

diventa

$$\frac{9 \cdot 1.366 \cdot 10^{-5}}{16.919} < \sigma^2 < \frac{9 \cdot 1.366 \cdot 10^{-5}}{3.325}$$

$\Rightarrow (7.26 \cdot 10^{-6}, 36.97 \cdot 10^{-6})$ intervallo bil. per σ^2

④ INTERVALLI DI CONFIDENZA PER LA VARIANZA σ^2 QUANDO LA MEDIA μ È NOTA

In questo caso si può usare la statistica

$$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n \quad (\text{TH. } 3)$$

e ragionare come nel caso 3, sostituendo alla statistica V, la statistica U (i.e. grado di libertà ora è n).

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n}}, \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n}} \right)$$ intervallo bilaterale per σ^2 quando μ è nota

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{\chi^2_{\alpha, n}}, +\infty \right)$$ intervallo unilat. dx

$$\left(0, \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha, n}} \right)$$ intervallo unilat. sx

Intervalli con livello di confidenza $1-\alpha$ per campioni normali.

$$X_1, X_2, \dots, X_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$$

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad S := \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2\right)^{1/2}$$

Ipotesi	θ	Intervallo bilaterale	Intervallo sinistro	Intervallo destro
σ^2 nota	μ	$\overline{X}_n \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\left(-\infty, \overline{X}_n + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$\left(\overline{X}_n - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right)$
σ^2 non nota	μ	$\overline{X}_n \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\left(-\infty, \overline{X}_n + t_{\alpha,n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$	$\left(\overline{X}_n - t_{\alpha,n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}, \infty\right)$
μ non nota	σ^2	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right)$	$\left(0, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha,n-1}}\right)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha,n-1}}, \infty\right)$
μ_{nota}	σ^2	$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n}}, \frac{\cdot}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n}}\right)$	$\left(0, \frac{\cdot}{\chi^2_{1-\alpha,n}}\right)$	$\left(\frac{\cdot}{\chi^2_{\alpha,n}}, \infty\right)$

SCHEMA

- STIMA per μ $\begin{cases} \text{se } \sigma \text{ è nota} \Rightarrow N(0,1) \\ \text{se } \sigma \text{ è incognita} \Rightarrow t_{n-1} \end{cases}$ solo per piccoli campioni $n \leq 30$

$\Rightarrow N(0,1)$ per $n \geq 30$ sostituendolo σ con s

- STIMA per σ^2 $\begin{cases} \text{se } \mu \text{ è nota} \Rightarrow \chi^2_n \\ \text{se } \mu \text{ è incognita} \Rightarrow \chi^2_{n-1} \end{cases}$

e la numerosità del campione non conta

Esempi

1. Stimare il n° medio di battiti cardiaci al minuto, di una popolazione normale $N(\mu, \sigma = 10)$ considerando un c.c. di dim = 49 avente $\bar{x}_m = 90$.
Determinare intervalli di confidenza bilaterali per μ al 90%, 95%, 99%.

- $(1-\alpha) = 0.90 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \qquad z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.05} = \underline{1.645}$

$$90 - 1.645 \cdot \frac{10}{7} < \mu < 90 + 1.645 \cdot \frac{10}{7}$$

$$\Downarrow$$

$$\mu \in (87,65 \; ; \; 92.35)$$

$l_I = 4.70$

- $(1-\alpha) = 0.95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \qquad z_{0.025} = \underline{1.96}$

$l_I = 5.60$

- $(1-\alpha) = 0.99 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \qquad z_{0.005} = \underline{2.58}$

$l_I = 7.36$

Se $(1-\alpha)$ aumenta, l_I aumenta.

2. Da una popolazione si estrae un campione di 16 oggetti di cui si misura il peso. Stimare il peso medio μ della popolazione sapendo che $\bar{x}_m = \bar{x}_{16} = 3.42$ grammi e $s = 0.68$ grammi, con un livello di confidenza del 99%.

Poichè eseguo delle misure, anche se il testo non lo specifica la distribuzione della popolazione è una normale $N(\mu, \sigma^2)$. Bisogna stimare μ con σ^2 incognita.

$n = 16$ campione piccolo (< 30)

$\nu = n-1 = 15$ g. di libertà della tabella della t di student.

$1-\alpha = 0.99 \qquad \frac{\alpha}{2} = 0.005$

$$t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = t_{0.005, 15} = 2.947$$

$$3.42 - 2.947 \cdot \frac{0.68}{4} < \mu < 3.42 + 2.947 \cdot \frac{0.68}{4}$$

$\Rightarrow \mu \in (2.91 ; 3.93)$

③ Dato un c.c. di 16 studenti scelti da una classe 5ª di una scuola superiore, se ne misura l'altezza.
È nota la varianza campionaria $s^2 = 37,09$ cm.
Determinare un intervallo di conf. bilat. al 95% per la varianza σ^2 della popolazione costituita da tutti gli studenti delle classi quinte.

Poiché faccio delle misure allora la densità della popolazione è una normale $N(\mu, \sigma^2)$.
Per costruire un int. di conf. per σ^2 quando μ non è nota uso la statistica V e quindi la χ^2_{n-1}.

$1-\alpha = 0.95 \qquad \alpha = 0.05 \qquad \frac{\alpha}{2} = 0.025 \qquad 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975$

$\nu = n-1 = 15$ g. di libertà della χ^2

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = \chi^2_{0.025, 15} = 27.488$$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} = \chi^2_{0.975, 15} = 6.262$$

$$\frac{15 \cdot 37,09}{27.488} < \sigma^2 < \frac{15 \cdot 37.09}{6.262}$$

$\Rightarrow \sigma^2 \in (20.23 ; 88,84)$

④ Le misure dei diametri di un c.c. di 200 sferette da cuscinetto prodotte da un macchinario, in una settimana, forniscono i seguenti dati:

$$\bar{x}_m = \bar{x}_{200} = 0.824 \text{ cm}$$

$$s = 0.042 \text{ cm}$$

Determinare un intervallo di conf. bilat. per la media μ della popolazione di sferette al 95%.

Faccio misure, quindi la f. di densità della popolazione è una normale $N(\mu, \sigma^2)$.

La σ^2 non è nota $\rightarrow$ dovrei applicare la statistica T, ma la tabella della t di Student arriva fino al grado di libertà $\nu = 50$ e nel nostro caso $\nu = m-1 = 199$!!

Poiché i grafici della t e della Z sono simili, si può usare la $N(0,1)$ sostituendo a σ incognita il valore campionario $s = 0.042$

$1-\alpha = 0.95$ $\quad \alpha = 0.05$ $\quad \frac{\alpha}{2} = 0.025$ $\quad Z_{0.025} = \underline{1.96}$

$$0.824 - 1.96 \cdot \frac{0.042}{\sqrt{200}} < \mu < 0.824 + 1.96 \cdot \frac{0.042}{\sqrt{200}}$$

$\rightarrow \mu \in (0.818 ; 0.83)$