RICHIAMI DI CALCOLO COMBINATORIO

Il calcolo combinatorio è una branca della matematica orientata allo sviluppo di formule che permettono di ottenere il numero dei modi con cui si possono disporre gli elementi di un insieme finito di oggetti, senza ricorrere alla loro enumerazione esplicita.

Principio fondamentale del calcolo combinatorio

Se una scelta può essere fatta in m_1 modi diversi, per ciascuno dei quali una seconda scelta può essere effettuata in m_2 modi diversi e per ciascuno dei modi con cui si sono compiute le prime due scelte, una terza scelta può essere fatta in m_3 modi diversi, etc...., allora la successione di tutte le scelte può essere compiuta in $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots$ modi diversi.

1) PERMUTAZIONI SEMPLICI

Dati n oggetti, si chiamano permutazioni semplici i modi con cui possiamo disporre gli n oggetti in n posizioni.

$$P_n = n\,(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$$

$$n! = n\,(n-1)!$$

$$0! = 1$$

Esempio

In quanti modi si possono disporre 4 persone su 4 sedie:

$$P_4 = 4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$$

2) PERMUTAZIONI CICLICHE

Se gli elementi di una permutazione semplice sono disposti in maniera circolare (il primo e ultimo elemento non sono individuabili) $\quad P_n^{(c)} = (n-1)!$

Esempio

In quanti modi diversi 4 persone si possono sedere attorno ad un tavolo:

$$P_4^{(c)} = 3! = 6$$

3) PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONE

Si parla di permutazioni con ripetizione quando gli n oggetti non sono tutti distinti cioè:

n_1 di un tipo

n_2 di un secondo tipo distinto dal primo

n_3 di un terzo tipo, distinto dal primo e dal secondo

⋮

n_k del k-esimo tipo, distinto dai precedenti $(k-1)$ tipi

tali che $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$

per cui

$$P^{(r)}_{n;n_1,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!}$$

Esempio

Quanti sono i numeri che si possono formare con i 4 numeri dell'insieme $A = \{1, 2, 2, 3\}$

$$P^{r}_{4;1,2,1} = \frac{4!}{1!\,2!\,1!} = 12$$

4) DISPOSIZIONI SEMPLICI

Si chiama disposizione semplice di n oggetti di classe k $(k \leq n)$ ogni allineamento, con oggetti tutti distinti, di n oggetti a gruppi di k, ovvero le k-uple ordinate ottenute con n oggetti distinti.

$$D_{n,k} = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Esempio

Qual è il numero di disposizioni di 4 oggetti, di classe 2:

$$D_{4,2} = \frac{4!}{2!} = 12$$

OSSERVAZIONE

$$D_{n,n} = P_n = n!$$

cioè le permutazioni semplici sono disposizioni semplici con $k=n$ e differisce solo l'ordine.

5) DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE

Una disposizione con ripetizione di n oggetti distinti, presi k alla volta, è un possibile modo di scegliere k oggetti, eventualmente ripetuti degli n e ordinarli.

$$D^{(r)}_{n,k} = n^k$$

Esempio

Quanti numeri di due cifre e quanti di tre cifre si possono scrivere con gli elementi, anche ripetuti dell'insieme

$A = \{1, 2, 5, 8\}$

$$D^{(r)}_{4,2} = 4^2 = 16$$

$$D^{(r)}_{4,3} = 4^3 = 64$$

6) COMBINAZIONI SEMPLICI

Le combinazioni semplici di n oggetti presi k a k, sono il numero di campioni non ordinati di numerosità k, ovvero il numero di sottoinsiemi distinti di cardinalità k che si possono formare con gli elementi di un insieme di cardinalità n

$(k \leq n)$

Dati n oggetti, in quanti modi se ne possono scegliere k?

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$ COEFFICIENTE BINOMIALE

Esempio

Quante sono le terne che si possono formare con i 90 numeri del Lotto:

$$C_{90,3} = \frac{90!}{3!\,87!} = 117\,480$$

4) COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE

Una combinazione con ripetizione è una combinazione in cui uno stesso elemento può avere delle ripetizioni.

Si considerano differenti due raggruppamenti che differiscono:

- per qualche elemento
- per il numero delle volte in cui un dato oggetto viene ripetuto.

In tal caso $k \gtrless n$.

$$C^{(r)}_{k,n} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

Esempio

Quanti gruppi con 2 elementi si possono formare con gli oggetti dell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$$C^{(r)}_{2,5} = C_{6,2} = \frac{6!}{2!\,4!} = 15$$