

# Probabilità e Statistica

## Variabili Casuali multidimensionali

Marco Pietro Longhi

C.d.L.: Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni, Ingegneria Informatica  
a.s. 2019/2020

## Esercizio

Due fabbriche diverse producono lo stesso componente per macchinari. I pezzi vengono classificati in base alla fabbrica che li ha prodotti e ai loro difetti. Sia  $X$  il numero della fabbrica (1 o 2) e  $Y$  il numero dei difetti per pezzo (0, 1, 2 o 3), di un pezzo scelto a caso tra la totalità di quelli esistenti. La tabella seguente riporta la funzione di massa di probabilità congiunta delle variabili casuali discrete  $X$  e  $Y$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$
$X = 2$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

- 1 Determinare le distribuzioni marginali di  $X$  e  $Y$ .
- 2 Calcolare  $E[X]$ ,  $E[Y]$ ,  $\text{var}[X]$  e  $\text{var}[Y]$ .
- 3 Determinare la covarianza  $\text{cov}[X, Y]$  delle variabili  $X$  e  $Y$ .

- 4 Determinare la funzione di densità di probabilità condizionata di  $X$  dato  $Y = 2$ .
- 5 Determinare la funzione di ripartizione condizionata di  $X$  dato  $Y = 2$ .
- 6 Determinare la funzione di densità di probabilità condizionata di  $Y$  dato  $X = 1$ .
- 7 Determinare la funzione di ripartizione condizionata di  $Y$  dato  $X = 1$ .
- 8 Determinare  $E[X|Y = 3]$ .

$$\left[ \dots, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{15}{8}, \frac{79}{64}, \frac{1}{8}, \dots \right]$$

## Esercizio

[Tema d'esame del 10/07/2017-C5]

Sia  $(X, Y)$  una coppia di variabili casuali discrete con la seguente funzione di densità di probabilità congiunta:

	$X = -1$	$X=0$	$X=1$
$Y = -1$	$1/5$	$0$	$1/5$
$Y = 0$	$0$	$b$	$0$
$Y = 1$	$1/5$	$0$	$1/5$

Determinare la covarianza  $\text{cov}[X, Y]$ .

[0]

## Esercizio

[Tema d'esame del 10/01/2006-E1]

Sia  $X$  una variabile aleatoria che assume i valori  $\{0, 1\}$  e  $Y$  una variabile aleatoria che assume i valori  $\{2, 3\}$ . Sapendo che

$$P[Y = 2] = \frac{2}{5}$$

$$P[X = 0|Y = 2] = P[Y = 2|X = 0] = \frac{1}{3}$$

calcolare la densità di probabilità congiunta di  $X$  e  $Y$  e la  $\text{cov}[X, Y]$ .

$$\left[ \begin{array}{l} p_{X,Y}(0,2) = \frac{2}{15} \\ p_{X,Y}(0,3) = \frac{4}{15} \\ p_{X,Y}(1,2) = \frac{4}{15} \\ p_{X,Y}(1,3) = \frac{1}{3} \\ \text{cov}[X, Y] = -\frac{2}{75} \end{array} \right]$$

## Esercizio

[Tema d'esame del 08/07/2019-C5]

Calcolare la covarianza della coppia  $(X, Y)$  di variabili casuali discrete che assumono rispettivamente valori  $\{0, 1\}$  e  $\{0, 1, 2\}$ , con funzione di densità congiunta:

$$f_{X,Y}(0, 1) = f_{X,Y}(1, 0) = f_{X,Y}(1, 1) = 1/6,$$

$$f_{X,Y}(1, 2) = 1/3,$$

$$f_{X,Y}(0, 0) = f_{X,Y}(0, 2) = 1/12.$$

$\left[ \frac{1}{18} \right]$

## Esercizio

[Tema d'esame del 29/08/2016-C4]

Sia  $X$  una variabile aleatoria che assume i valori  $\{0, 1\}$  ed  $Y$  una variabile aleatoria che assume i valori  $\{2, 3\}$ . Sapendo che

$$P[Y = 2] = \frac{2}{5}, \quad P[X = 0|Y = 2] = P[Y = 2|X = 0] = \frac{1}{3},$$

calcolare la  $P[X = 1|Y = 3]$ .

$\left[\frac{5}{9}\right]$

## Esercizio

[Tema d'esame del 08/07/2015-C5]

Il numero  $x$  è scelto a caso nell'insieme  $\{0, 2, 4, 6\}$ , il numero  $y$  è scelto a caso nell'insieme  $\{2, 3, 6, 9, 11\}$ . Calcolare  $P[X \geq Y \mid Y \text{ dispari}]$ .

$$\left[\frac{1}{6}\right]$$



## Esercizio

[Tema d'esame del 27/08/2018-C7]

Sia  $(X, Y)$  una coppia di variabili casuali discrete con la seguente densità di probabilità congiunta

	$X = -3$	$X=0$	$X=5$
$Y=0$	$p$	$0$	$q$
$Y=1$	$3q$	$2p$	$0$

Determinare il valore di  $p$  affinché  $E[X + Y] = -7/24$ .

$\left[\frac{1}{6}\right]$

## Esercizio

[Tema d'esame del 03/06/2019-C4 2° Test]

Calcolare la covarianza della coppia  $(X, Y)$  di variabili casuali discrete che assumono rispettivamente valori  $\{0, 1, 2\}$  e  $\{0, 2\}$ , con funzione di densità congiunta:

$$f_{X,Y}(0,0) = f_{X,Y}(1,0) = f_{X,Y}(0,2) = 1/6,$$

$$f_{X,Y}(2,0) = 1/3,$$

$$f_{X,Y}(1,2) = f_{X,Y}(2,2) = 1/12.$$

$$\left[-\frac{2}{9}\right]$$

## Esercizio

Lanciamo tre volte una moneta e indichiamo con  $X$  la variabile casuale che denota il numero di volte in cui si ottiene testa e con  $Y$  la variabile casuale che denota il valore assoluto della differenza tra il numero di teste e il numero di croci ottenute.

Determinare:

- 1 la funzione di densità di probabilità congiunta di  $X$  e  $Y$ ;
- 2 le funzioni di densità di probabilità marginali di  $X$  e di  $Y$ .

$Y \backslash X$	0	1	2	3	$f_Y(y)$
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$f_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	

## Esercizio

Un'azienda stipula un contratto per vendere barattoli di conserva di 500g. La quantità di conserva  $X$  messa in ciascun barattolo è predeterminata meccanicamente ed è normalmente distribuita con media  $\mu$  e deviazione standard 25g.

- 1 A quale valore di  $\mu$  deve essere tarata la macchina, affinché il 2% dei barattoli contenga meno di 500g di conserva?
- 2 Supponiamo che i barattoli siano di metallo e che il loro peso  $Y$  da vuoti segua una distribuzione  $N(90, 8)$ . Se un ispettore pesa i barattoli pieni e scarta quelli il cui peso è inferiore 590g, quale percentuale di barattoli non passerà l'ispezione?

[551.4, 0.025]

## Esercizio

[Tema d'esame del 15/01/2013-C4]

Sia  $(X, Y)$  una coppia di variabili casuali discrete con la seguente densità di probabilità congiunta

$Y \backslash X$	-1	0	3
0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0

Determinare  $E[X + 2Y]$ .

## Esercizio

[Tema d'esame del 03/09/2019-C6]

Calcolare la varianza della variabile casuale  $Z = 3X - Y$ , con  $X$  ed  $Y$  variabili casuali indipendenti.

$$[9\sigma_X^2 + \sigma_Y^2]$$

## Esercizio

[Tema d'esame del 10/07/2012-E2]

Si lanci due volte una moneta non truccata e sia  $X$  la variabile aleatoria pari alla differenza tra il numero di teste e il numero di croci ottenute e  $Y = X^2 + 1$ .

- 1 Determinare la funzione di probabilità congiunta;
- 2 determinare le funzioni di densità marginali;
- 3 stabilire se  $X$  e  $Y$  sono indipendenti;
- 4 calcolare la covarianza  $\text{cov}[X, Y]$ .

$X \backslash Y$	-2	0	2	
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

$X, Y$  dipendenti,  $\text{cov}[X, Y] = 0$

## Esercizio

[Tema d'esame del 13/06/2018-C6]

Sia  $(X, Y)$  una coppia di variabili casuali discrete con la seguente densità di probabilità congiunta

$Y \backslash X$	-4	0	1
0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0

Determinare la covarianza  $\text{cov}[X, Y]$ .

$$\left[ \text{cov}[X, Y] = -\frac{5}{32} \right]$$



## Esercizio

[Tema d'esame del 02/07/2018-C5 e del 26/03/2018-C5 ]

Sia  $(X, Y)$  una coppia di variabili casuali discrete con la seguente densità di probabilità congiunta

$Y \backslash X$	0	1	3
-1	$\frac{p}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{p}{4}$	$\frac{1}{4}$	0

- 1 determinare il valore di  $\rho$ ;
- 2 calcolare il coefficiente di correlazione  $\rho[5X, 3Y]$ .

$$\left[ \rho = \frac{1}{3}, \rho = -\frac{2}{9}\sqrt{6} \right]$$

## Esercizio

[Tema d'esame del 02/07/2018-C8]

Siano  $X, Y$  due variabili casuali con  $Y = 2\pi X + 7$ . Calcolare il coefficiente di correlazione  $\rho_{X,Y}$ .

$$[\rho_{X,Y} = 1]$$

## Esercizio

[Tema d'esame del 04/07/2019-C4]

Sia  $(X, Y)$  una coppia di variabili casuali discrete con la seguente densità di probabilità congiunta

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	$1/6$	0	$2a$
1	$a/3$	$a$	0

Dopo aver determinato il valore di  $a$ , determinare il coefficiente di correlazione  $\rho[2X, 10Y]$ .

$$\left[ a = \frac{1}{4}, \rho = -\frac{\sqrt{22}}{11} \right]$$

## Esercizio

[Tema d'esame del 26/03/2018-QT1]

Date due variabili casuali  $X$  ed  $Y = X + 2$ , dimostrare che il coefficiente di correlazione è:

$$\rho_{X,Y} = 1.$$

## Esercizio

[Tema d'esame del 15/04/2019-C8]

Date 6 variabili casuali  $X_1, \dots, X_6$  indipendenti ed identicamente distribuite, con varianza pari a 4, calcolare la varianza della funzione media campionaria  $\bar{X}_6$ .

$$\left[ \sigma(\bar{X}_6) = \frac{2}{3} \right]$$

## Esercizio

[Tema d'esame del 05/09/2011-E1]

Un'urna contiene dodici palline numerate (due con inciso il numero 1, due con inciso il numero 3, quattro con inciso il numero 2 e quattro con inciso il numero 4). Si estrae una pallina dall'urna. Siano  $X$  la variabile casuale che indica il numero inciso sulla pallina estratta e  $Y$  la variabile casuale definita da  $Y = \frac{1}{2}(X - 2)^2$ .

- 1 Determinare la densità congiunta  $f_{X,Y}$ .
- 2 Determinare le densità marginali  $f_X, f_Y$ .
- 3 Verificare se  $X$  e  $Y$  sono indipendenti.

- 1 Calcolare  $\text{cov}[X, Y]$ .
- 2 Calcolare  $P\left[X > 2 \mid Y = \frac{1}{2}\right]$ .

$$\left[ \begin{array}{l} f_{X, Y}(2, 0) = f_{X, Y}(4, 2) = \frac{1}{3} \\ f_{X, Y}(1, \frac{1}{2}) = f_{X, Y}(3, \frac{1}{2}) = \frac{1}{6} \\ f_X(1) = f_X(3) = \frac{1}{6} \\ f_X(2) = f_X(4) = \frac{1}{3} \\ f_Y(0) = f_Y(\frac{1}{2}) = f_Y(2) = \frac{1}{3} \\ \text{dipendenti} \\ \text{cov}[X, Y] = \frac{7}{9} \\ P[X > 2 \mid Y = \frac{1}{2}] = \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

## Esercizio

[Tratto dal Tema d'esame del 22/12/2003-E4]

Sia  $X$  la variabile casuale avente funzione di densità

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-(x-2)} & \text{se } x > 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Siano  $X_1, X_2, \dots, X_n$   $n$  variabili casuali indipendenti e ciascuna con la stessa densità di probabilità  $f_X$ . Sia  $Y = \min[X_1, X_2, \dots, X_n]$ . Calcolare la funzione di ripartizione e la funzione di densità della variabile casuale  $Y$ .

$$\left[ F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-n(y-2)} & \text{se } y > 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} ne^{-n(y-2)} & \text{se } y > 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \right]$$

## Esercizio

[Tema d'esame del 30/06/2009-C4]

Siano  $X$  una variabile casuale di Poisson di parametro  $\lambda$  e  $Y$  una variabile casuale di densità

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{6}{y^7} & y > 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare il valore di  $\lambda$  che soddisfa

$$E[X + Y] = \frac{7}{5}.$$

[1/5]