

Probabilità e Statistica

Variabili Casuali
Approssimazioni

Marco Pietro Longhi

C.d.L.: Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni, Ingegneria Informatica
a.s. 2019/2020

disuguaglianza di Chebyshev

disuguaglianza di Markov

se $g(x) \geq 0$ ed è continua e $r > 0$ allora

$$P[g(X) \geq r] \leq \frac{1}{r} E[g(X)]$$

disuguaglianza di Chebyshev

se $r > 0$ si ha

$$P[|X - \mu_X| \geq r \sigma_X] \leq \frac{1}{r^2}$$

disuguaglianza di Chebyshev applicata alla media campionaria

$$P \left[\left| \bar{X}_n - \mu \right| \geq \epsilon \right] \leq \frac{\text{var} \left[\bar{X}_n \right]}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

$$P \left[\left| \bar{X}_n - \mu \right| < \epsilon \right] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

Esercizi

Esercizio

Qual è la probabilità di trovare al massimo 5 flaconi scaduti di un medicinale in uno scaffale di 200 flaconi, se l'esperienza mostra che il 2 per cento di essi sono scaduti?

[V.C. Binomiale, 0.788, approssimando con la V.C. di Poisson 0.785]

Esercizio

[Tema d'esame del 09/06/2015-C4]

Un'azienda di trasporto urbano possiede 200 autobus. Questi hanno una probabilità pari a $p = 0.01$ di subire un guasto in una giornata. Il reparto di manutenzione riesce a far fronte a non più di 2 riparazioni al giorno. Calcolare la probabilità che il reparto non riesca a riparare tutti gli autobus che si guastano in un giorno.

V.C. Binomiale: 0.32332

approssimando con la V.C. di Poisson: 0.32332

Esercizio

[Tema d'esame del 03/09/2019-C3]

Si sa che la probabilità di errore di ricezione di una sequenza di 150 segnali indipendenti trasmessi lungo un canale è pari a $p = 0.01$.
Determinare la probabilità che due dei segnali ricevuti siano errati.

[approssimando con la V.C. di Poisson 0.25102]

Esercizio

Supponiamo che in un corso di laurea con 600 iscritti al primo anno solo 240 riescano a laurearsi. Prendiamo a caso 3 matricole:

- 1 Qual è la probabilità che giungano tutte 3 alla laurea?
- 2 Qual è la probabilità che nessuna delle 3 giunga alla laurea?

[V.C. Ipergeometrica, 0.06352, 0.2153
approssimando con la V.C. Binomiale 0.064, 0.216]

Esercizio

[Tema d'esame del 03/06/2019-C1 2° Test]

Sia X la variabile casuale che descrive il numero di teste ottenute in 100 lanci di una moneta non truccata. Calcolare (con un'opportuna approssimazione) la probabilità:

$$P[|X - \mu_X| \leq 8].$$

[approssimando con la V.C. Normale, 0.8904,
approssimando con la V.C. Normale con correzione di continuità 0.91086,]

Esercizio

Su una popolazione di 100.000 individui, 48.000 sono femmine. Calcolare la probabilità che su 400 individui appartenenti alla popolazione, iscritti a un corso:

- 1 ci siano 200 femmine;
- 2 le femmine siano non meno di 190 e non più di 205.

[appross. la V.C. Ipergeometrica con la V.C. Binomiale
(appross. con la V.C. normale) 0.02898, 0.5102]

Esercizio

Uno studente sta svolgendo un esame di 25 domande a scelta multipla, con 5 risposte per ogni domanda. Lo studente risponde a caso e indipendentemente a ogni domanda.

- 1 Determinare la probabilità che lo studente risponda correttamente al massimo a 3 domande.
- 2 È possibile approssimare la distribuzione di probabilità che descrive questo "esperimento" con una distribuzione normale?
- 3 In qualsiasi caso si risolve il punto 1 con l'approssimazione normale senza e con correzione di continuità.

[0.234, si, senza correzione di continuità 0.15866, con corr. di cont. 0.22663]

Esercizio (Tema d'esame del 14/09/2004)

Supponiamo che, in un libro di 400 pagine, la probabilità che una pagina sia priva di errori sia 0.98, indipendentemente dalle altre pagine. Sia X il numero di pagine che contengono almeno un errore.

- 1 Qual è la distribuzione di X ?
- 2 Usando l'approssimazione normale, calcolare approssimativamente la probabilità dell'evento $[X \geq 4]$.

[V.C. Binomiale, con correzione di continuità 0.94575]

Esercizio

I dati raccolti in un lungo periodo di tempo mostrano che un bambino su mille presenta un certo difetto genetico. I dati di una clinica medica asseriscono che su 50000 bambini esaminati, 60 ne sono affetti. Se si prende un campione casuale di 50000 bambini, qual è la probabilità di trovare più di 60 bambini affetti da tale difetto genetico?

[approssimando con la V.C. Normale con correzione di continuità 0.089315]

Esercizio

[Tema d'esame del 15/04/2019-C5]

Sia X una variabile casuale di Poisson, di parametro $\lambda = 3$. Verificare che

$$P[|X - 3| \geq 2\sqrt{3}] \leq \frac{1}{4}$$

[disug. di Chebyshev]

Esercizio

[Tema d'esame del 21/03/2016-C5]

Calcolare il limite inferiore alla probabilità che una variabile casuale X assuma valori che si discostano dalla media per meno di 2 volte la deviazione standard.

[disug. di Chebyshev $\frac{3}{4}$]

Esercizio

[Tema d'esame del 28/08/2017-C5]

Sia X una variabile casuale con media $\mu_X = 8$ e varianza $\sigma_X^2 = 9$.

Calcolare il limite inferiore alla probabilità:

$$P[-4 < X < 20].$$

[disug. di Chebyshev $\frac{15}{16}$]

Esercizio

[Tema d'esame del 12/01/2016-C5]

Sia X una variabile casuale di Poisson con media $\mu = 100$. Calcolare il limite inferiore alla probabilità $P[75 < X < 125]$.

[disug. di Chebyshev $\frac{21}{25}$]

Esercizio

[Tema d'esame del 04/07/2019-C8]

L'agenzia delle tasse estrae un individuo a caso da una popolazione che ha reddito medio pari a 50.000€ l'anno con deviazione standard pari a 10.000€. Trovare un limite superiore per la probabilità che venga estratto un individuo con reddito inferiore a 20.000€ o superiore a 80.000€.

[disug. di Chebyshev $\frac{1}{9}$]

Esercizio

Dall'esperienza passata, un docente sa che se si sceglie uno studente a caso, il suo punteggio all'esame di fine corso di laurea sarà una variabile casuale di media 75.

- 1 Dare un limite superiore alla probabilità che un punteggio superi o uguagli 85 punti.
- 2 Supponendo che sia nota anche la varianza di tale variabile aleatoria, pari a 25, con quale valore minimo di probabilità si può asserire che uno studente ottenga un punteggio compreso tra 65 e 85?

[disug. di Markov $\frac{15}{17}$, disug. di Chebyshev $\frac{3}{4}$]

Esercizio

Supponiamo che X sia una variabile aleatoria con media e varianza entrambe uguali a 20. Che cosa si può dire sulla $P[0 \leq X \leq 40]$?

[disug. di Chebyshev $0,95 \leq P[0 \leq X \leq 40] \leq 1$]

Esercizio

Sia X una variabile aleatoria di media $\mu_X = 0$. Verificare che per ogni $\epsilon > 0$ si ha

$$P[|2X| \geq \epsilon] \leq \frac{4E[X^2]}{\epsilon^2}$$

[disug. di Markov]

Esercizio

[Tema d'esame del 21/12/2014-E5]

Supponiamo di conoscere che il numero di articoli prodotti da una fabbrica durante una settimana è dato da una variabile aleatoria di media pari a 50. Se la varianza della produzione settimanale è nota essere uguale a 25, cosa possiamo affermare della probabilità che la produzione di questa settimana sia compresa tra 40 e 60 unità?

$$\text{[disug. di Chebyshev } 0,75 \leq P[40 \leq X \leq 60] \leq 1]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 27/08/2018-C6]

Il numero di clienti che visitano un concessionario di auto al sabato mattina è una variabile casuale X con media $\mu = 18$ e deviazione standard $\sigma = 2,5$. Con quale valore minimo di probabilità si può asserire che il numero di clienti sia compreso tra 8 e 28?

[disug. di Chebyshev $\frac{15}{16}$]

Esercizio

[Test d'esame del 02/07/2018-C3]

Sia X una variabile casuale con media 3 e varianza 2. Dare un limite inferiore per $P[-1 < X < 7]$.

[disug. di Chebyshev $\frac{7}{8}$]

Esercizio

[2° Test d'esame del 13/06/2018-C3]

Dall'esperienza passata, un docente sa che se si sceglie a caso uno studente, il suo punteggio all'esame di laurea sarà una variabile casuale di media 80 e varianza 25. Qual è il numero minimo di studenti che devono sostenere l'esame affinché vi sia una probabilità almeno di 0.8 che la media dei punteggi della sessione non disti più di 5 da 80?

[disug. di Chebyshev applicata alla media campionaria 6 (accettato anche 5)]