

Probabilità e Statistica

Stima puntuale di parametri

Marco Pietro Longhi

C.d.L.: Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni, Ingegneria Informatica
a.s. 2019/2020

Esercizi

Esercizio

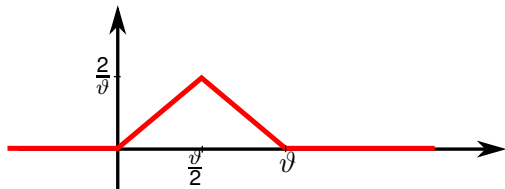
[Tratto dal tema d'esame del 05/07/2016-C6]

Si consideri per $\vartheta > 0$ la funzione definita da

$$f(x; \vartheta) = \begin{cases} \frac{4}{\vartheta^2} x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{\vartheta}{2} \\ \frac{4}{\vartheta^2} \cdot (\vartheta - x) & \text{se } \frac{\vartheta}{2} < x \leq \vartheta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- 1 Verificare che per ogni $\vartheta > 0$, $f(\cdot; \vartheta)$ rappresenta una funzione di densità di probabilità.
- 2 Sia X_1, X_2, \dots, X_n un campione casuale estratto dalla popolazione di densità $f(\cdot, \vartheta)$, stabilire se $T = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ è uno stimatore corretto di ϑ .

Disegniamo il grafico della funzione di densità di probabilità data



1 Risultato

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x; \vartheta) dx = \frac{1}{2} \vartheta \frac{2}{\vartheta} = 1$$

quindi $f(\cdot; \vartheta)$ rappresenta una funzione di densità di probabilità per ogni $\vartheta > 0$

1 T è uno stimatore **corretto** o **non distorto** di ϑ se $E[T] = \vartheta$.

Nel nostro caso $E[X] = \frac{1}{2}\vartheta$ e

$$\begin{aligned} E[T] &= E\left[\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n E[X_i] = \\ &= \frac{2}{n} \cdot nE[X_i] = \frac{2}{n}n\frac{1}{2}\vartheta = \vartheta \implies \text{lo stimatore è corretto} \end{aligned}$$

Esercizio

Sia X la variabile casuale di Poisson di parametro λ ,

- 1 determinare uno stimatore con il metodo dei momenti;
- 2 verificare la correttezza dello stimatore trovato;
- 3 calcolare l'errore quadratico medio;
- 4 supponendo poi di avere i seguenti dati campionati

2, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 2, 3, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 3, 4

calcolare il valore stimato di λ .

X ha funzione di densità di probabilità

$$f_X(x; \lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & \text{se } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Determiniamo uno stimatore **con il metodo dei momenti**.

Ricordiamo che con

$$M'_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^r, \quad \mu'_r = E[X^r]$$

si indica, rispettivamente, il momento campionario assoluto di ordine r e il momento di ordine r della variabile casuale X . Il metodo dei momenti consiste nel risolvere il sistema nelle incognite $\vartheta_1, \dots, \vartheta_k$ di k , numero dei parametri incogniti, equazioni

$$\begin{cases} \mu'_1 = M'_1 \\ \mu'_2 = M'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu'_k = M'_k \end{cases}$$

Nel nostro caso abbiamo solo un parametro da stimare, λ , quindi calcoliamo

$$\mu'_1 = E[X] = \lambda, \text{ e } M'_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Posto $\mu'_1 = M'_1$, risulta $\bar{\Lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

Per determinare se lo stimatore è non distorto calcoliamo

$$E \left[\widehat{\Lambda}(X_1, X_2, \dots, X_n) \right] = E \left[\bar{X}_n \right] = \frac{1}{n} E \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] = \frac{1}{n} n E[X] = E[X]$$

Essendo X v.c. di Poisson di parametro λ , si ha $E[X] = \lambda$, quindi

$$E \left[\widehat{\Lambda}(X_1, X_2, \dots, X_n) \right] = \lambda \implies \widehat{\Lambda} \text{ stimatore non distorto}$$

Chiamiamo **errore quadratico medio** di uno stimatore $T = t(X_1, \dots, X_2)$, la funzione di ϑ data da:

$$\text{MSE}[T](\vartheta) := E[(T - \tau(\vartheta))^2]$$

con $\tau(\vartheta)$ funzione del parametro da stimare. Ma

$$\text{MSE}[T](\vartheta) := \text{var}[T] + [D[T](\vartheta)]^2, \quad D[T](\vartheta) := \tau(\vartheta) - E[T]$$

Nel nostro caso $E[\hat{\Lambda}] = \lambda \implies D[\hat{\Lambda}] = 0$, quindi

$$\text{MSE}[\hat{\Lambda}] = \text{var}[\hat{\Lambda}] = \text{var}[\bar{X}_n] \underbrace{=}_{X_i \text{ ind.}} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{var}[X_i] = \frac{1}{n^2} \cdot n\lambda = \frac{\lambda}{n}$$

Troviamo λ mediante i dati campionari

$$\hat{\lambda} = \frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 2}{24} = \frac{77}{24} \approx 3,2083$$

Esercizio

Sia $X_1, X_2 \dots X_n$ un campione casuale di ampiezza n estratto da una popolazione con distribuzione uniforme nell'intervallo $[a - b, a + b]$. Determinare gli stimatori di a e b con il metodo dei momenti.

L'intervallo ha ampiezza $a + b - (a - b) = 2b$, ne segue che la funzione di densità di probabilità della v.c. X è

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{2b} & \text{se } a - b \leq x \leq a + b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Per determinare gli stimatori di a , b con il metodo dei momenti, bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} \mu'_1 = M'_1 \\ \mu'_2 = M'_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \mu'_1 = \bar{X}_n \\ \mu'_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{cases}$$

Calcoliamo $\mu'_1 = \frac{a+b+a-b}{2} = a$ e

$$\mu'_2 = \text{var}[X] + (\mu'_1)^2 = \frac{[(a+b) - (a-b)]^2}{12} + a^2 = \frac{b^2}{3} + a^2$$

Sostituendo

$$\begin{cases} a = \bar{X}_n \\ \frac{b^2}{3} + a^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{cases}$$

ed eseguendo alcuni passaggi algebrici, ne segue che gli stimatori cercati sono

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{e} \quad \hat{b} = \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{3}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2}$$

Esercizio

[Tratto dal tema d'esame del 29/08/2016-C6]

Si supponga che X_1, X_2, X_3 sia un campione casuale di ampiezza 3 estratto da una distribuzione esponenziale di media λ . Si considerino i seguenti stimatori del parametro λ :

$$\Lambda_1 = X_1, \Lambda_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \Lambda_3 = \frac{X_1 + 2X_2}{3}, \Lambda_4 = \bar{X}_3$$

- 1 Indicare quali sono gli stimatori non distorti di λ .
- 2 Individuare tra gli stimatori non distorti quello con MSE minimo.

Sia X una v.c. esponenziale di media λ , si ha

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

con $E[X] = \lambda$ e $\text{var}[X] = \lambda^2$.

Calcoliamo il valore atteso degli stimatori dati

$$E[\Lambda_1] = E[X_1] = \lambda$$

$$E[\Lambda_2] = E\left[\frac{X_1 + X_2}{2}\right] = \frac{1}{2}(E[X_1] + E[X_2]) = \frac{1}{2} \cdot 2\lambda = \lambda$$

$$E[\Lambda_3] = E\left[\frac{X_1 + 2X_2}{3}\right] = \frac{1}{3}(E[X_1] + 2E[X_2]) = \frac{1}{3} \cdot (\lambda + 2\lambda) = \lambda$$

$$E[\Lambda_4] = E[\bar{X}_3] = \lambda$$

Tutti gli stimatori dati sono non distorti, per individuare il preferibile, calcoliamo la varianza di ciascuno:

$$\text{var}[\Lambda_1] = \text{var}[X_1] = \lambda^2$$

$$\begin{aligned}\text{var}[\Lambda_2] &= \text{var}\left[\frac{X_1 + X_2}{2}\right] = \frac{1}{4}(\text{var}[X_1] + \text{var}[X_2] + 2\text{cov}[X_1, X_2]) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2\lambda^2 = \frac{1}{2}\lambda^2 \quad (X_1 \text{ e } X_2 \text{ sono indipendenti})\end{aligned}$$

$$\text{var}[\Lambda_3] = \text{var}\left[\frac{X_1 + 2X_2}{3}\right] = \frac{1}{9}(\text{var}[X_1] + 4\text{var}[X_2]) = \frac{1}{9} \cdot (\lambda^2 + 4\lambda^2) = \frac{5}{9}\lambda^2$$

$$\text{var}[\Lambda_4] = \text{var}\left[\bar{X}_3\right] = \frac{1}{3}\lambda^2$$

Lo stimatore non distorto con varianza minima è la media campionaria.

Esercizio

[Tema d'esame del 17/06/2019 - C7] Sia X_1, X_2, X_3 un campione casuale di dimensione 3 estratto da una popolazione normale con media μ e varianza σ^2 . Dati i seguenti stimatori del parametro μ

$$\bar{X}_3 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}, \quad T = \frac{1}{5}X_1 + \frac{1}{5}X_2 + \frac{3}{5}X_3,$$

stabilire quale sia il più efficiente.

$[\bar{X}_3]$

Esercizio

[Tema d'esame del 08/07/2019 - C6]

Da una popolazione con distribuzione uniforme sull'intervallo $[a, b]$, con a e b parametri incogniti ($a < b$), si estrae un campione casuale di dimensione n , dal quale si ricava che la media campionaria e il momento campionario di ordine 2 hanno i seguenti valori:

$$\bar{X}_n = 2, \quad M'_2 = 5.$$

Utilizzando il metodo dei momenti, stimare i parametri incogniti a e b .

$$[a = 2 - \sqrt{3}; b = 2 + \sqrt{3}]$$

Esercizio

Il numero di interruzioni (crash) di un personal computer segue una distribuzione di Poisson di parametro λ . Sia $X_1, X_2 \dots X_n$ un campione casuale di ampiezza n estratto dalla distribuzione di Poisson data. Se il costo di riparazione è dato da

$$Y_n = 3\bar{X}_n + \bar{X}_n^2$$

dove \bar{X}_n è la media campionaria su n crash, calcolare $E[Y_\infty]$.

Sia X una v.c. di Poisson di parametro λ , si ha

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & \text{se } x = 0, 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

con $E[X] = \lambda$ e $\text{var}[X] = \lambda$.

Calcoliamo il valore atteso dello stimatore dato

$$E[Y_n] = E[3\bar{X}_n + \bar{X}_n^2] = 3E[\bar{X}_n] + E[\bar{X}_n^2] = 3\lambda + E[\bar{X}_n^2]$$

Ma

$$E[\bar{X}_n^2] - E[\bar{X}_n]^2 = \text{var}[\bar{X}_n], \quad \text{var}[\bar{X}_n] = \frac{\text{var}[X]}{n} = \frac{\lambda}{n},$$

quindi

$$E[Y_n] = 3\lambda + \frac{\lambda}{n} + \lambda^2$$

e passando al limite per $n \rightarrow \infty$ si ha

$$E[Y_\infty] = 3\lambda + \lambda^2$$

Esercizio (Tema d'esame del 04/07/2019 - C5)

Sia X_1, \dots, X_n un campione casuale estratto da una popolazione i cui elementi si distribuiscono con una funzione di densità data da

$$f_X(x, \vartheta) = \begin{cases} \vartheta^2 x e^{-\vartheta x} & \text{se } x \in (0, +\infty) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $\vartheta > 0$. Determinare uno stimatore T di ϑ con il metodo dei momenti.

$$\left[T = \frac{2}{\bar{X}_n} \right]$$

Esercizio

$X_1, X_2 \dots X_n$ un campione casuale proveniente da una distribuzione rettangolare nell'intervallo $[0, 2\vartheta]$ con $\vartheta > 0$.

- 1 Si determini lo stimatore di ϑ con il metodo dei momenti.
- 2 Si verifichi se tale stimatore è consistente.

L'intervallo ha ampiezza $2\vartheta - 0 = 2\vartheta$, ne segue che la funzione di densità di probabilità della v.c. rettangolare X è

$$f(x; \vartheta) = \begin{cases} \frac{1}{2\vartheta} & \text{se } 0 \leq x \leq 2\vartheta \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Per determinare lo stimatore di ϑ con il metodo dei momenti, bisogna risolvere l'equazione

$$\mu'_1 = M'_1 \implies \mu'_1 = \bar{X}_n,$$

rispetto a ϑ .

Calcoliamo $\mu'_1 = \frac{0+2\vartheta}{2} = \vartheta$, sostituendo nell'equazione precedente risulta \bar{X}_n uno stimatore di ϑ . Essendo $E[\bar{X}_n] = \vartheta$, lo stimatore è non distorto.

Calcoliamo

$$\text{var}[\bar{X}_n] \underset{X_i \text{ indep.}}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{var}[X_i] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \frac{\vartheta^2}{3} = \frac{\vartheta^2}{3n}.$$

Ne segue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E\left[\left(\bar{X}_n - \vartheta\right)^2\right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\vartheta^2}{3n} = 0,$$

quindi lo stimatore è consistente.

Esercizio (Tema d'esame del 10/01/2006 - E2)

Sia $X_1, X_2 \dots X_n$ un campione casuale di ampiezza n estratto da una popolazione con densità di probabilità

$$f_X(x, \vartheta) = \begin{cases} \frac{2}{\vartheta} \left(1 - \frac{x}{\vartheta}\right) & \text{se } 0 \leq x \leq \vartheta \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

con $\vartheta > 0$.

- 1 Determinare uno stimatore T di ϑ con il metodo dei momenti.
- 2 Stabilire se T è distorto e calcolarne l'errore quadratico medio.

Individuiamo lo stimatore T del parametro ϑ , risolvendo rispetto a ϑ

$$\bar{X}_n = E[X].$$

Calcoliamo

$$E[X] = \int_0^{\vartheta} \frac{2}{\vartheta} x \left(1 - \frac{x}{\vartheta}\right) dx = \frac{1}{3}\vartheta$$

quindi

$$\bar{X}_n = \frac{1}{3}\vartheta \implies T = 3\bar{X}_n.$$

Lo stimatore è non distorto, infatti, $E[3\bar{X}_n] = 3E[\bar{X}_n] = 3\frac{\vartheta}{3} = \vartheta$

Calcoliamo, infine, l'errore quadratico medio

$$\text{MSE}[T] = \text{var}[T] = \text{var}[3\bar{X}_n] = 9\frac{\text{var}[X]}{n}.$$

$$E[X^2] = \int_0^{\vartheta} \frac{2}{\vartheta} x^2 \left(1 - \frac{x}{\vartheta}\right) dx = \frac{\vartheta^2}{6} \implies \text{var}[X] = \frac{\vartheta^2}{6} - \frac{\vartheta^2}{9} = \frac{\vartheta^2}{18}.$$

Ne segue $\text{MSE}[T] = \frac{\vartheta^2}{2n}$.

Esercizio (Tratto dal tema d'esame del 12/01/2016-C6 e tema d'esame del 13/06/2018 - C8)

Sia X_1, \dots, X_n un campione casuale, di dimensione n , estratto da una distribuzione rettangolare uniforme sull'intervallo $[a, 2a]$.

- 1 Determinare uno stimatore T_1 di a con il metodo dei momenti. Verificare se lo stimatore T_1 è distorto e calcolarne l'errore quadratico medio $MSE[T_1]$.
- 2 Considerato poi lo stimatore $T_2 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{6}X_2$, verificare se T_2 è distorto e calcolarne l'errore quadratico medio $MSE[T_2]$.
- 3 Supposto $n = 3$, quale dei due stimatori T_1 e T_2 di a è preferibile (giustificare la risposta)?

$$\left[\begin{array}{l} T_1 = \frac{2}{3}\bar{X}_n \\ T_1 \text{ non distorto} \\ MSE[T_1] = \frac{a^2}{27n} \\ T_2 \text{ non distorto} \\ MSE[T_2] = \frac{5a^2}{216} \\ T_1 \text{ preferibile} \end{array} \right]$$

Esercizio

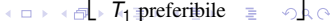
[Tratto dal Tema d'esame del 04/07/2006 - E1 e Tema d'esame del 27/08/2018 - C8]

Sia X_1, \dots, X_8 un campione aleatorio, di dimensione 8, estratto da una distribuzione rettangolare uniforme sull'intervallo $[-1, b]$, con $b > -1$.

Si chiede:

- 1 determinare uno stimatore T_1 di b con il metodo dei momenti;
- 2 determinare se lo stimatore T_1 sia distorto;
- 3 calcolare l'errore quadratico medio $MSE[T_1]$;
- 4 considerato poi lo stimatore $T_2 = 4\bar{X}_8 - X_3 - X_5 + 1$, calcolarne l'errore quadratico medio $MSE[T_2]$;
- 5 determinare quale dei due stimatori T_1 e T_2 di b sia preferibile, giustificando la risposta.

$$\left[\begin{array}{l} T_1 = 2\bar{X}_8 + 1 \\ T_1 \text{ non distorto} \\ MSE[T_1] = \frac{(b+1)^2}{24} \\ MSE[T_2] = \frac{(b+1)^2}{3} \\ T_1 \text{ preferibile} \end{array} \right]$$



Esercizio

[2° Test d'esame del 13/06/2018 - C5]

Sia X_1, \dots, X_n un campione casuale di ampiezza n , estratto da una distribuzione continua uniforme nell'intervallo $[a - 2, 2a + 3]$ con $a > 1$. Determinare uno stimatore di a con il metodo dei momenti.

$$\left[T = \frac{2\bar{X}_n - 1}{3} \right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 23/06/2014 - C3]

Sia X_1, \dots, X_n , $n \geq 2$, un campione casuale estratto dalla funzione di densità di probabilità

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{3}{4\theta\sqrt{2\theta}} \sqrt{x} & 0 < x < 2\theta, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

$\theta > 0$. Determinare uno stimatore T di θ con il metodo dei momenti.

$$\left[T = \frac{5}{6} \bar{X}_n \right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 15/01/2019 - C7]

Sia X_1, \dots, X_n un campione casuale di ampiezza n estratto da una popolazione distribuita con densità di probabilità

$$f_X(x, \theta) = \begin{cases} 8^{-\theta} \theta x^{\theta-1} & \text{se } 0 < x < 8, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

con $\theta \in \mathbb{R}^+$. Si determini lo stimatore $\hat{\theta}$ del parametro θ con il metodo dei momenti.

$$\left[\hat{\theta} = \frac{\bar{X}_n}{8 - \bar{X}_n} \right]$$