Probabilità e Statistica

Variabili Casuali multidimensionali

Marco Pietro Longhi

C.d.L.: Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni, Ingegneria Informatica
a.s. 2020/2021

Esercizio

Due fabbriche diverse producono lo stesso componente per macchinari. I pezzi vengono classificati in base alla fabbrica che li ha prodotti e ai loro difetti. Sia X il numero della fabbrica (1 o 2) e Y il numero dei difetti per pezzo (0,1, 2 o 3), di un pezzo scelto a caso tra la totalità di quelli esistenti. La tabella seguente riporta la funzione di massa di probabilità congiunta delle variabili casuali discrete X e Y.

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	$Y=3$
$X=1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$
$X=2$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

1. Determinare le distribuzioni marginale di X e Y.
2. Calcolare $E[X]$, $E[Y]$, $\mathrm{var}[X]$ e $\mathrm{var}[Y]$.
3. Determinare la covarianza $\mathrm{cov}[X, Y]$ delle variabili X e Y.

4. Determinare la funzione di densitá di probabilitá condizionata di X dato $Y = 2$.
5. Determinare la funzione di ripartizione condizionata di X dato $Y = 2$.
6. Determinare la funzione di densitá di probabilitá condizionata di Y dato $X = 1$.
7. Determinare la funzione di ripartizione condizionata di Y dato $X = 1$.
8. Determinare $E[X|Y = 3]$.

$$\left[\cdots,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{15}{8},\ \frac{79}{64},\ \frac{1}{8},\ \cdots\right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 10/07/2017-C5]
Sia (X, Y) una coppia di variabili casuali discrete con la seguente funzione di densità di probabilità congiunta:

	$X = -1$	X=0	X=1
$Y = -1$	$1/5$	0	$1/5$
$Y = 0$	0	b	0
$Y = 1$	$1/5$	0	1/5

Determinare la covarianza $\text{cov}[X, Y]$.

[0]

Esercizio

[Tema d'esame del 10/01/2006-E1]
Sia X una variabile aleatoria che assume i valori $\{0, 1\}$ e Y una variabile aleatoria che assume i valori $\{2, 3\}$. Sapendo che

$$P[Y = 2] = \frac{2}{5}$$

$$P[X = 0|Y = 2] = P[Y = 2|X = 0] = \frac{1}{3}$$

calcolare la densità di probabilità congiunta di X e Y e la $\mathrm{cov}[X, Y]$.

$$\begin{bmatrix} p_{X,Y}(0,2) = \frac{2}{15} \\ p_{X,Y}(0,3) = \frac{4}{15} \\ p_{X,Y}(1,2) = \frac{4}{15} \\ p_{X,Y}(1,3) = \frac{1}{3} \\ \mathrm{cov}[X, Y] = -\frac{2}{75} \end{bmatrix}$$

Esercizio

[Tema d'esame del 08/07/2019-C5]
Calcolare la covarianza della coppia (X, Y) di variabili casuali discrete che assumono rispettivamente valori $\{0, 1\}$ e $\{0, 1, 2\}$, con funzione di densità congiunta:

$$f_{X,Y}(0,1) = f_{X,Y}(1,0) = f_{X,Y}(1,1) = 1/6\,,$$
$$f_{X,Y}(1,2) = 1/3\,,$$
$$f_{X,Y}(0,0) = f_{X,Y}(0,2) = 1/12\,.$$

$$\left[\frac{1}{18}\right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 29/08/2016-C4]
Sia X una variabile aleatoria che assume i valori $\{0, 1\}$ ed Y una variabile aleatoria che assume i valori $\{2, 3\}$. Sapendo che

$$P[Y = 2] = \frac{2}{5}\ ,\ \ P[X = 0|Y = 2] = P[Y = 2|X = 0] = \frac{1}{3}\ ,$$

calcolare la $P[X = 1|Y = 3]$.

$\left[\frac{5}{9}\right]$

Esercizio

[Tema d'esame PS sez. A-L 16/07/2020-dom. 5]
Due variabili casuali (X, Y) assumono rispettivamente valori $\{0,1\}$ ed $\{1,2\}$ con funzione di densità congiunta

$$f_{X,Y}(0,1) = p, \quad f_{X,Y}(0,2) = 2p, \quad f_{X,Y}(1,1) = 0, \quad f_{X,Y}(1,2) = 1-3p$$

Determinare il valore di p se la covarianza della coppia (X, Y) è pari a $\frac{1}{12}$.

$$\left[\frac{1}{6}\right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 08/07/2015-C5]
Il numero x è scelto a caso nell'insieme $\{0, 2, 4, 6\}$, il numero y è scelto a caso nell'insieme $\{2, 3, 6, 9, 11\}$. Calcolare $P[X \geq Y \mid Y \text{dispari}]$.

$\left[\frac{1}{6}\right]$

Esercizio

[Tema d'esame del 27/08/2018-C7]
Sia (X, Y) una coppia di variabili casuali discrete con la seguente densità di probabilità congiunta

	$X = -3$	X=0	X=5
Y=0	p	0	q
Y=1	$3q$	$2p$	0

Determinare il valore di p affinchè $E[X + Y] = -7/24$.

$\left[\frac{1}{6}\right]$

Esercizio

[Tema d'esame del 03/06/2019-C4 2° Test]

Calcolare la covarianza della coppia (X, Y) di variabili casuali discrete che assumono rispettivamente valori $\{0, 1, 2\}$ e $\{0, 2\}$, con funzione di densità congiunta:

$$f_{X,Y}(0,0) = f_{X,Y}(1,0) = f_{X,Y}(0,2) = 1/6\,,$$
$$f_{X,Y}(2,0) = 1/3\,,$$
$$f_{X,Y}(1,2) = f_{X,Y}(2,2) = 1/12\,.$$

$\left[-\frac{2}{9}\right]$

Esercizio

Lanciamo tre volte una moneta e indichiamo con X la variabile casuale che denota il numero di volte in cui si ottiene testa e con Y la variabile casuale che denota il valore assoluto della differenza tra il numero di teste e il numero di croci ottenute.
Determinare:

1. la funzione di densitá di probabilitá congiunta di X e Y;
2. le funzioni di densitá di probabilitá marginali di X e di Y.

$Y \backslash X$	0	1	2	3	$f_Y(y)$
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$f_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	

Esercizio

Un’azienda stipula un contratto per vendere barattoli di conserva di $500g$. La quantitá di conserva X messa in ciascun barattolo é predeterminata meccanicamente ed é normalmente distribuita con media μ e deviazione standard $25g$.

1. A quale valore di μ deve essere tarata la macchina, affinché il 2% dei barattoli contenga meno di $500g$ di conserva?
2. Supponiamo che i barattoli siano di metallo e che il loro peso Y da vuoti segua una distribuzione $N(90, 8)$. Se un ispettore pesa i barattoli pieni e scarta quelli il cui peso é inferiore $590g$, quale percentuale di barattoli non passerá l’ispezione?

[551.4, 0.025]

Esercizio

[Tema d'esame del 15/01/2013-C4]
Sia (X, Y) una coppia di variabili casuali discrete con la seguente densità di probabilità congiunta

$Y \backslash X$	-1	0	3
0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0

Determinare $\mathrm{E}[X + 2Y]$.

$\left[\frac{7}{6}\right]$

Esercizio

[Tema d'esame del 03/09/2019-C6]
Calcolare la varianza della variabile casuale $Z = 3X - Y$, con X ed Y variabili casuali indipendenti.

$$\left[9\sigma_X^2 + \sigma_Y^2\right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 10/07/2012-E2]
Si lanci due volte una moneta non truccata e sia X la variabile aleatoria pari alla differenza tra il numero di teste e il numero di croci ottenute e $Y = X^2 + 1$.

1. Determinare la funzione di probabilità congiunta;
2. determinare le funzioni di densità marginali;
3. stabilire se X e Y sono indipendenti;
4. calcolare la covarianza $\mathrm{cov}[X, Y]$.

$Y \backslash X$	-2	0	2	
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

X,Y dipendenti, cov[X,Y]=0

Esercizio

[Tema d'esame del 13/06/2018-C6]

Sia (X, Y) una coppia di variabili casuali discrete con la seguente densità di probabilità congiunta

$Y \backslash X$	-4	0	1
0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0

Determinare la covarianza $\mathrm{cov}[X, Y]$.

$\left[\mathrm{cov}[X, Y] = -\frac{5}{32}\right]$

Esercizio

[Tema d'esame del 02/07/2018-C5 e del 26/03/2018-C5]
Sia (X, Y) una coppia di variabili casuali discrete con la seguente densità di probabilità congiunta

Y \ X	0	1	3
-1	$\frac{p}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{p}{4}$	$\frac{1}{4}$	0

1. determinare il valore di p;
2. calcolare il coefficiente di correlazione $\rho[5X, 3Y]$.

$$\left[p = \frac{1}{3},\ \rho = -\frac{2}{9}\sqrt{6}\right]$$

Esercizio

[Tema d'esame PS sez. M-Z 17/07/2020-dom. 4]
Siano X, Y due variabili casuali binomiali indipendenti, di parametri $n = 10$ e $p = 0.5$. Calcolare il coefficiente di correlazione $\rho_{X,Y}$.

$$[\rho_{X,Y} = 0]$$

Esercizio

[Tema d'esame PS sez. M-Z 04/09/2020-dom. 4]
Siano X, Y due variabili casuali con $Y = 3\pi X + 2$. Calcolare il coefficiente di correlazione $\rho_{X,Y}$.

$$[\rho_{X,Y} = 1]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 02/07/2018-C8]
Siano X, Y due variabili casuali con $Y = 2\pi X + 7$. Calcolare il coefficiente di correlazione $\rho_{X,Y}$.

$\left[\rho_{X,Y} = 1\right]$

Esercizio

[Tema d'esame del 04/07/2019-C4]
Sia (X, Y) una coppia di variabili casuali discrete con la seguente densità di probabilità congiunta

X \ Y	0	1	2
-1	$1/6$	0	$2a$
1	$a/3$	a	0

Dopo aver determinato il valore di a, determinare il coefficiente di correlazione $\rho[2X, 10Y]$.

$$\left[a = \frac{1}{4},\ \rho = -\frac{\sqrt{22}}{11}\right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 26/03/2018-QT1]
Date due variabili casuali X ed $Y = X + 2$, dimostrare che il coefficiente di correlazione è:

$$\rho_{X,Y} = 1.$$

Esercizio

[Tema d'esame del 15/04/2019-C8]
Date 6 variabili casuali $X_1, \ldots, X_6$ indipendenti ed identicamente distribuite, con varianza pari a 4, calcolare la varianza della funzione media campionaria $\overline{X}_6$.

$$\left[\sigma\left(\overline{X}_6\right) = \frac{2}{3}\right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 05/09/2011-E1]
Un'urna contiene dodici palline numerate (due con inciso il numero 1, due con inciso il numero 3, quattro con inciso il numero 2 e quattro con inciso il numero 4). Si estrae una pallina dall'urna. Siano X la variabile casuale che indica il numero inciso sulla pallina estratta e Y la variabile casuale definita da $Y = \frac{1}{2}(X-2)^2$.

1. Determinare la densità congiunta $f_{X,Y}$.
2. Determinare le densità marginali f_X, f_Y.
3. Verificare se X e Y sono indipendenti.

1. Calcolare cov[X,Y].
2. Calcolare $P\left[X > 2 \mid Y = \frac{1}{2}\right]$.

$$\left[\begin{array}{l}
\begin{cases} f_{X,Y}(2,0) = f_{X,Y}(4,2) = \frac{1}{3} \\ f_{X,Y}(1,\frac{1}{2}) = f_{X,Y}(3,\frac{1}{2}) = \frac{1}{6} \end{cases} \\
\begin{cases} f_X(1) = f_X(3) = \frac{1}{6} \\ f_X(2) = f_X(4) = \frac{1}{3} \end{cases} \\
f_Y(0) = f_Y(\frac{1}{2}) = f_Y(2) = \frac{1}{3} \\
\text{dipendenti} \\
\text{cov}[X,Y] = \frac{7}{9} \\
\text{P}[X > 2 | Y = \frac{1}{2}] = \frac{1}{2}
\end{array}\right]$$

Esercizio

[Tratto dal Tema d'esame del 22/12/2003-E4]
Sia X la variabile casuale avente funzione di densitá

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-(x-2)} & \text{se } x > 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variabili casuali indipendenti e ciascuna con la stessa densitá di probabilitá f_X. Sia $Y = \min[X_1, X_2, \ldots, X_n]$. Calcolare la funzione di ripartizione e la funzione di densitá della variabile casuale Y.

$$\left[\quad F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-n(y-2)} & \text{se } y > 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} ne^{-n(y-2)} & \text{se } y > 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad \right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 30/06/2009-C4]
Siano X una variabile casuale di Poisson di parametro λ e Y una variabile casuale di densitá

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{6}{y^7} & y > 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare il valore di λ che soddisfa

$$\mathrm{E}[X + Y] = \frac{7}{5}.$$

$\left[\frac{1}{5}\right]$