Probabilità e Statistica

Variabili casuali

Marco Pietro Longhi

C.d.L.: Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni, Ingegneria Informatica
a.s. 2020/2021

Esercizi

Esercizio

Dire se le seguenti funzioni sono funzioni di ripartizione di una variabile casuale reale:

1. $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{50}x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 5 \\ -\frac{1}{50}x^2 + \frac{2}{5}x - 1 & \text{se } 5 < x \leq 10 \\ 1 & \text{se } x > 10 \end{cases}$$

2. $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 2x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ -x + 3 & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

[*si*; *no*]

Esercizio

Dire se la seguente funzione è una funzione di ripartizione di una variabile casuale reale:

1. $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

[*si*]

Esercizio

Si consideri un'urna contenente 6 palline verdi e 4 blu. Sia X la variabile casuale discreta che denota il numero di palline verdi estratte in un'estrazione in blocco di 3 palline. Determinare

1. la funzione densità di probabilità e tracciarne il grafico;
2. la funzione di ripartizione F_X e tracciarne il grafico;
3. la probabilità che al più 1 pallina sia verde;
4. $P[0 < X \leq 2]$, $P[1 \leq X \leq 3]$;
5. $E[X]$, $\mathrm{var}[X]$ e σ_X.

$$\left[\quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & x = 0 \\ \frac{3}{10} & x = 1 \\ \frac{1}{2} & x = 2 \\ \frac{1}{6} & x = 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{30} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{5}{6} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} P[X \leq 1] = \frac{1}{3} \\ P[0 < X \leq 2] = \frac{4}{5} \\ P[1 \leq X \leq 3] = \frac{29}{30} \end{array} \qquad \begin{array}{l} E[X] = \frac{9}{5} \\ \mathrm{var}[X] = \frac{14}{25} \\ \sigma_X = 0,748 \end{array} \quad\right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 08/07/2019-C2]
La variabile casuale continua X possiede la seguente funzione di densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{5}\,x & \text{se } 0 \le x \le 1\,, \\[2ex] \dfrac{3}{5} & \text{se } 1 \le x \le 2\,, \\[2ex] 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Calcolare il valore della funzione di ripartizione $F_X(x)$ per $x = 7/6$.

$\left[\frac{1}{2}\right]$

Esercizio

Si consideri la variabile casuale continua X che rappresenta la durata di un pezzo in anni, con densità di probabilità data da

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{78}\left(x^2+1\right) & \text{se } 0 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare $P[X \leq 4]$, $P[2 < X \leq 5]$, $P[2 \leq X \leq 5]$ e $P[X > 2]$.

$$\left[\begin{array}{l} P[X \leq 4] = \frac{38}{117} \\ P[2 < X \leq 5] = \frac{7}{13} \\ P[2 \leq X \leq 5] = \frac{7}{13} \\ P[X > 2] = \frac{110}{117} \end{array}\right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 19/06/2017-C4]
La durata di un dispositivo è una variabile casuale X con funzione di densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x^2} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Calcolare la probabilità $P[X > 2|X > 1]$.

$[e^{-6}]$

Esercizio

[Tema d'esame del 03/09/2019-C5]
Data la seguente funzione:

$$f_X(x) = \begin{cases} C\, x\, sinx & \text{se } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

dopo aver determinato il valore della costante C affinchè $f_X(x)$ sia una funzione di probabilità della variabile aleatoria continua X, calcolare la probabilità $P[X \leq \dfrac{\pi}{4}]$.

$\left[C = 1\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{8}(4 - \pi) = 0.15174\right]$

Esercizio

[Tema d'esame del 15/04/2019-C6] Data la densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} kx^2 & -3 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{1}{4} & 2 < x \leq 4 \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

determinare la costante di normalizzazione k.

$\left[\frac{3}{70}\right]$

Esercizio

[Tema d'esame del 05/07/2016-C4]
Dopo aver calcolato la costante di normalizzazione della densità di probabilità di una variabile casuale continua X, definita da

$$f_X(x) = \begin{cases} Ce^{-2x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti}\,, \end{cases}$$

calcolare $P[X > 1]$.

$[2;\ e^{-2}]$

Esercizio

Sia assegnata una variabile casuale X con densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Calcolare la corrispondente funzione di ripartizione.

$$\left[\quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}x & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases} \quad \right]$$

Esercizio

La funzione di ripartizione di una variabile casuale X è

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{3}{4}x^2\left(1 - \frac{1}{3}x\right) & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Determinare

a) $P\left[X > \frac{2}{3}\right]$,

b) $P[-1 < X \leq 1]$.

$$\left[\begin{array}{l} P\left[X > \frac{2}{3}\right] = \frac{20}{27} \\ \\ P[-1 < X \leq 1] = \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Esercizio

[tratto dal tema d'esame del 26/08/2015-C3]

a) Determinare il valore della costante C affinché $f_X(x)$ definita da

$$f_X(x) = \begin{cases} Cx(2-x) & \text{se } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{se } x < 0 \cup x > 2, \end{cases}$$

sia una funzione di probabilità nella variabile aleatoria continua X e tracciarne il grafico.

b) Determinare la corrispondente funzione di ripartizione F_X e tracciarne il grafico.

c) Calcolare $P[X > 1]$ e $E[X]$.

$$\left[\begin{array}{l} C = \frac{3}{4} \\[2ex] F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2\,(3 - x) & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases} \\[2ex] P[X > 1] = \frac{1}{2} \\[2ex] E[X] = 1 \end{array}\right]$$

Esercizio

Determinare la funzione di densità associata alla funzione di ripartizione:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{50}x^2 & \text{se } 0 \le x \le 5 \\ -\frac{1}{50}x^2 + \frac{2}{5}x - 1 & \text{se } 5 < x \le 10 \\ 1 & \text{se } x > 10 \end{cases}$$

Determinare, inoltre, $E[X]$

$$\left[\quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{25}x & 0 \le x < 5 \\ -\frac{1}{25}x + \frac{2}{5} & 5 \le x < 10 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad E[X] = 5 \quad \right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 15/01/2019-C4]
Data la variabile casuale continua X avente la seguente funzione di densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} -\dfrac{6}{125}\left(x^2 - 7x + 6\right) & \text{se } 1 < x < 6, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

determinare il valore atteso $E[X]$.

$\left[\frac{7}{2}\right]$

Esercizio

[Tema d'esame del 17/06/2019-C4]
Sia X una variabile casuale continua avente la seguente funzione di densità di probabilità

$$f_X(x) = \frac{3}{2}(x-1)^2 \,, \qquad 0 \leq x \leq 2,$$

e nulla altrove. Calcolare la probabilità che X assuma valori in un intorno, avente raggio $\delta = 0.5$, del suo valore atteso.

$\left[\frac{1}{8}\right]$

Esercizio

[Tema d'esame del 08/07/2015-C4]
Data la densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} ax^2 + b & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

determinare b affinchè si abbia $\mathrm{E}[X] = 5/4$.

$[a = \frac{3}{16};\ b = \frac{1}{4}]$

Esercizio

[Tema d'esame del 17/01/2012-C4]
Sia X una variabile casuale uniformemente distribuita sull'intervallo $\left[\frac{3a-5}{2}, \frac{3}{2}a - 1\right]$. Calcolare $\mathrm{var}[X]$.

$[\frac{3}{16}]$

Esercizio

[Tema d'esame PS sez. A-L 25/06/2020-dom. 3]
Sia X una variabile casuale uniformemente distribuita sull'intervallo $\left[\dfrac{2a+1}{3}, \dfrac{2}{3}a+3\right]$. Calcolare $\mathrm{var}[X]$.

$[\frac{16}{27}]$

Esercizio

[Tema d'esame del 08/04/2019-C5 1° Test]
Data la seguente funzione:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{C}{x^2} & \text{se } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

dopo aver determinato il valore della costante C affinché $f_X(x)$ sia una funzione di probabilità nella variabile aleatoria continua X, calcolare la varianza di X.

$$\left[C = 2 \, , \ \text{var}[X] = 2 - 4 \ln^2(2) \right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 19/06/2012-C4]
Sia X la variabile casuale avente densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{16}x^2 & \text{se } -2 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Calcolare $\mathrm{var}[X]$.

$[\frac{44}{25}]$

Esercizio

Il tempo di vita di un fusibile è una variabile casuale X di densità

$$f_X(x) = a^2 x \cdot e^{-ax} \cdot I_{[0,+\infty)}(x) \text{ con } a > 0$$

Calcolare il tempo di vita media.

$[\frac{2}{a}]$

Esercizio

[Tema d'esame del 29/08/2016-C3] (*funzione di variabile casuale*)
Se il tempo necessario per riparare un personal computer è una variabile casuale, misurata in ore, la cui densità è data da

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti}\,, \end{cases}$$

il costo del lavoro per la riparazione è una variabile casuale $Y = 40 + 30\sqrt{x}$ euro, dove x sono le ore necessarie per la riparazione.
Calcolare il valore atteso del costo di una riparazione.

[68, 28 €]

Esercizio

[Tema d'esame del 15/04/2019-C4]
Sia X una variabile casuale discreta tale che $\mathrm{P}[X = 0] = \mathrm{P}[X = 6] = p$, $\mathrm{P}[X = 3] = 1 - 2p$. Determinare il valore di p in modo tale che la sua deviazione standard σ_X sia pari a 2.

$[\frac{2}{9}]$

Esercizio

[Tema d'esame del 15/01/2013-C3]
Una variabile aleatoria X può assumere solo i valori $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Sapendo che X ha la stessa probabilità di assumere i valori $1, 2, 3, 4$ e che $\mathrm{E}[X] = 1.5$, determinare $\mathrm{P}[X = 0]$.

$[0, 4]$

Esercizio

[Tema d'esame PS sez. M-Z 17/07/2020-dom. 1]
Sia X una variabile casuale discreta che assume i valori $1, 2, 3$ con la stessa probabilità $p = \frac{1}{3}$. Calcolare la varianza $\mathrm{var}[X]$.

$[\frac{2}{3}]$

Esercizio

[Tema d'esame PS sez. M-Z 04/09/2020-dom. 1]
Sia X una variabile casuale discreta tale che $\mathrm{P}[X = 0] = \frac{1}{3}$ e $\mathrm{P}[X = 2] = \frac{2}{3}$.Calcolare la varianza $\mathrm{var}[X]$.

$[\frac{8}{9}]$

Esercizio

[Tema d'esame del 02/07/2013-C4]
Sia X la variabile casuale uguale al numero di rigori segnati da un giocatore nei prossimi 3 turni di rigore. Sapendo che:

$$P[X = 1] = 0.3, \quad P[X = 2] = 0.2, \quad P[X = 0] = 3P[X = 3],$$

calcolare $E[X]$.

$[1,075]$

Esercizio

[Tema d'esame del 04/07/2019-C7]
Sia X una variabile casuale discreta tale che $P[X = 0] = a$, $P[X = 3] = 2a$, $\quad P[X = 6] = 1 - 3a$. Determinare il valore di a sapendo che il valore atteso $E[X]$ è pari a 3.

$\left[\frac{1}{4}\right]$

Esercizio

Si consideri il lancio di una coppia di dadi indipendenti e non truccati. Sia X la variabile casuale discreta che denota il minimo dei punti usciti. Determinare

1. la funzione di massa di probabilità e tracciarne il grafico;
2. la funzione di ripartizione F_X e tracciarne il grafico;
3. la probabilità che lanciando i dadi il minimo dei punti usciti sia al più 3;
4. $P[X > 5]$, $P[2 < X \leq 4]$ e $P[2 \leq X \leq 4]$;
5. $E[X]$, $\mathrm{var}[X]$ e σ_X.

$$\left[\quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{11}{36} & x = 1 \\ \frac{1}{4} & x = 2 \\ \frac{7}{36} & x = 3 \\ \frac{5}{36} & x = 4 \\ \frac{1}{12} & x = 5 \\ \frac{1}{36} & x = 6 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{11}{36} & 1 \le x < 2 \\ \frac{5}{9} & 2 \le x < 3 \\ \frac{3}{4} & 3 \le x < 4 \\ \frac{8}{9} & 4 \le x < 5 \\ \frac{35}{36} & 5 \le x < 6 \\ 1 & x \ge 6 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} P[X \le 3] = \frac{3}{4} \\ \\ P[X > 5] = \frac{1}{36} \\ \\ P[2 < X \le 4] = \frac{1}{3} \\ \\ P[2 \le X \le 4] = \frac{7}{12} \end{array} \qquad \begin{array}{l} E[X] = \frac{91}{36} \\ \\ \mathrm{var}[X] = 1,9715 \\ \\ \sigma_X = 1,40 \end{array} \quad\right]$$

Esercizio

[Tratto dal tema d'esame del 07/01/2014-C3]
Sia X la variabile aleatoria avente densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{9} & \text{se } -1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Calcolare $E[X]$, il momento assoluto del secondo ordine e $\mathrm{var}[X]$.

$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{43}{80}\right]$

Esercizio

Sapendo che $E[X] = 2$, $E\left[X^2\right] = 8$, calcolare $E\left[4(1+2X)^2\right]$.

[164]

Esercizio

[tema d'esame del 15/01/2019-C8]
Sia X una variabile casuale tale che X ed X^2 siano indipendenti.
Verificare che

$$E[X^3] = E[X] \operatorname{var}[X] + (E[X])^3.$$

Esercizio

Sia assegnata una variabile casuale X con densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}\left(4x - 2x^2\right) & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Calcolare $E[X]$, $\operatorname{var}[X]$ e σ_X.

$$\left[1\,,\frac{1}{5}\,,\frac{\sqrt{5}}{5}\right]$$

Esercizio

Un'urna contiene 30 palline numerate da 1 a 30. Sia X la variabile casuale che denota il resto della divisione col numero 6 del numero inciso sulla pallina estratta. Determinare $E[X]$, $\mathrm{var}[X]$ e σ_X.

$$\left[\frac{15}{6}\,;\,\frac{35}{12}\,;\,1,71\right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 28/06/2005-C3]
Sia assegnata una variabile casuale X con densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} -\frac{1}{15}x^2 + \frac{2}{5} & \text{se } -2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Calcolare $E[X]$.

$$\left[-\frac{7}{20}\right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 28/06/2005-E2]
La quantità (in quintali) di rifiuti smaltiti da un'industria in giornata è una variabile aleatoria X con densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} kx & \text{se } 0 \leq x \leq 5a \\ k(10a - x) & \text{se } 5a < x \leq 10a \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Nel caso in cui $a = \frac{6}{5}$, si chiede:

1. Calcolare k e disegnare il grafico di $f_X(x)$.
2. Considerati gli eventi

$$A = \{\text{i rifiuti smaltiti sono più di } 5a \text{ quintali}\}$$

$$B = \{\text{i rifiuti smaltiti sono meno di } 5a \text{ quintali}\}$$

$$C = \{\text{la quantità di rifiuti smaltiti è compresa tra } 2.5a \text{ e } 7.5a \text{ quintali}\},$$

calcolare la probabilità $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A|B)$, $P(A|C)$. Gli eventi A e B sono indipendenti? Gli eventi A e C sono indipendenti?

$$\left[\begin{array}{l} k = \frac{1}{36} \\ P(A) = P(B) = \frac{1}{2} \\ P(C) = \frac{3}{4} \\ P(A|B) = 0 \\ P(A|C) = \frac{1}{2} \\ A, B \text{ dipendenti} \\ A, C \text{ indipendenti} \end{array}\right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 07/12/2004 - es 2]

Il tempo, in ore, della durata di funzionamento di un computer (prima di bloccarsi) è una variabile aleatoria continua data da

$$f_X(x) = \begin{cases} C\, e^{-\frac{x}{100}} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

1. Determinare la costante C di normalizzazione e tracciare il grafico di $f_X(x)$.
2. Determinare la corrispondente funzione di ripartizione F_X e tracciarne il grafico.
3. Qual è la probabilità che il computer funzioni tra le 50 e le 150 ore prima di bloccarsi?

$$\left[C = \tfrac{1}{100};\ F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{100}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases};\ 0,3834\right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 03/09/2019 - C4]
Sia X la variabile casuale che rappresenta la durata di funzionamento in mesi di un modello di frizer per supermercato. Sapendo che la durata media è pari a 100 mesi, calcolare la mediana $med[X]$ relativa alla variabile casuale X.

$$[X \sim Exp\,(\lambda)\ ;\ 69.31]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 22/12/2003 - es 2]

1. Verificare che la seguente funzione

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \\ \ln x & \text{se } 1 < x \leq e \\ 1 & \text{se } x > e \end{cases}$$

   è una funzione di ripartizione di una variabile casuale X e tracciarne il grafico.
2. Determinare la corrispondente funzione di densità f_X e tracciarne il grafico.
3. Calcolare $E[X]$ e $\mathrm{var}[X]$.
4. Calcolare $P[X > 3]$ e $P[X > 2]$.

$$\left[\quad f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & 1 < x \leq e \\ 0 & x > e \end{cases} \qquad \begin{array}{l} E[X] = e - 1 \\ \\ \mathrm{var}[X] = \frac{1}{2}(e-1)(3-e) \end{array} \qquad \begin{array}{l} P[X > 3] = 0 \\ \\ P[X > 2] = 1 - ln2 \end{array} \quad\right]$$

Esercizio

[Tratto dal tema d'esame del 22/12/2003 - es 4]
Sia X la variabile casuale avente funzione di densità

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-(x-2)} & \text{se } x > 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Determinare la corrispondente mediana, $\mathrm{med}[X]$.
2. Siano $X_1, \ldots, X_n$ n variabili casuali indipendenti e ciascuna con la stessa densità di probabilità f_X. Sia $Y = \min[X_1, \ldots, X_n]$. Calcolare la funzione di ripartizione e la funzione di densità della variabile casuale Y.

$$\left[\quad \operatorname{med}[X] = 2 + \ln 2 \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 2 \\ 1 - e^{-n(y-2)} & y > 2 \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 2 \\ ne^{-n(y-2)} & y > 2 \end{cases} \quad \right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 11/09/2012-E2]
Sia X la variabile aleatoria avente densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} 2\cos(2X) & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{4}, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

1. determinare la funzione di ripartizione F_X;
2. calcolare $\mathrm{P}[X > \frac{\pi}{6}]$;
3. determinare la media $\mathrm{E}[X]$;
4. determinare $\mathrm{E}\left[\frac{1}{\cos(2X)}\right]$.

$$
\left[
\begin{array}{l}
F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \sin(2x) & \text{se } 0 \le x < \frac{\pi}{4} \\ 1 & \text{se } x \ge \frac{\pi}{4} \end{cases} \\[2em]
\mathrm{P}[X > \frac{\pi}{6}] = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\[2em]
\mathrm{E}[X] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \\[2em]
\mathrm{E}[\frac{1}{\cos(2x)}] = \frac{\pi}{2}
\end{array}
\right]
$$

Esercizio

[Tema d'esame del 03/07/2007-E2] (*funzione di variabile casuale*)
Sia X una variabile casuale avente densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{\sqrt{x}} & \text{se } 0 < x \leq 4, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

1. Calcolare la costante k di normalizzazione.
2. Determinare la funzione di ripartizione F_X.
3. Calcolare $\mathrm{var}[X]$.
4. Calcolare $P\left[\frac{16}{9} \leq X \leq 8\right]$.
5. Calcolare $E[\sqrt{X}]$.

$$
\left[
\begin{array}{l}
k = \dfrac{1}{4} \\
F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{x} & 0 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases} \\
\mathrm{Var}[X] = \dfrac{64}{45} \\
\mathrm{P}\left[\dfrac{16}{9} \leq X \leq 8\right] = \dfrac{1}{3} \\
\mathrm{E}[\sqrt{X}] = 1
\end{array}
\right]
$$

Esercizio

[Tema d'esame del 16/06/2009-E2]
Data la funzione di ripartizione

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}(1 + \sin x) & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 1 & x \geq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

(a) determinare la funzione di densità;

(b) calcolare $\mathrm{P}\left[0 < X < \sqrt{77} \,|\, X < \frac{\pi}{4}\right]$;

(c) verificare se gli eventi $\left\{-\frac{\pi}{4} < X < \frac{\pi}{4}\right\}, \left\{0 < X < \frac{\pi}{2}\right\}$ sono indipendenti;

(d) calcolare $\mathrm{E}[2X - \pi]$.

$$\begin{bmatrix} f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos x & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \\ \mathrm{P}[0 < X < \sqrt{77} \,|\, X < \frac{\pi}{4}] = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \\ \text{indipendenti} \\ \mathrm{E}[2X - \pi] = -\pi \end{bmatrix}$$