

Probabilità e Statistica

Modelli di Variabili Casuali

Marco Pietro Longhi

C.d.L.: Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni, Ingegneria Informatica
a.s. 2020/2021

Esercizi

Esercizio

Lanciando un dado non truccato, qual è la probabilità che il punteggio sia più di 2 e meno di 4. Introdurre la v.c. opportuna e calcolarne valore atteso e varianza.

[V.C. Uniforme discreta, $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{35}{12}$]

Esercizio

La probabilità che un tiratore scelto non colpisca il bersaglio è 0.08. Calcolare la probabilità che, su 10 tiri, ne fallisca 2. Calcolare, inoltre, $E[X]$ e $\text{var}[X]$ della variabile casuale introdotta.

[V.C. Binomiale, 0.1478, 0.8, 0.736]

Esercizio

Si supponga che il numero delle chiamate che arrivano ogni secondo ad un centralino telefonico sia una variabile casuale di Poisson con media 5.

- 1 Determinare la probabilità che in un determinato secondo non arrivi nessuna chiamata.
- 2 Supponendo che il centralino sia in grado di soddisfare non più di 10 chiamate al secondo, calcolare la probabilità di trovarlo occupato.

$$[6.74 \cdot 10^{-3}, 0.0137]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 28/08/2017-C4]

Il tempo di attesa T (in minuti) di arrivo del primo cliente ad uno sportello è un variabile casuale esponenziale. Sapendo che il tempo medio di attesa è pari a 2 minuti e che nei primi 2 minuti non è arrivato alcun cliente, calcolare la probabilità che il primo cliente arrivi nei successivi 3 minuti.

$$[1 - e^{-3/2}]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 10/07/2017-C2]

Una macchina produce componenti, ognuno dei quali,

indipendentemente dagli altri, risulta non difettoso con probabilità $\frac{9}{10}$.

Se X indica il numero di pezzi da produrre fino ad ottenere 1 pezzo difettoso, calcolare la probabilità $P[X = 4]$.

[V.C. Geometrica, 0.0729]

Esercizio

[Tema d'esame del 19/06/2017-C2]

Il numero di chiamate ad un centralino, tra le 10 e le 11, è una variabile casuale di Poisson di parametro λ . Sapendo che il numero medio di chiamate nell'ora considerata è pari a 6, calcolare la probabilità che arrivino meno di 3 telefonate.

$$[25 e^{-6}]$$

Esercizio

[Esercizio tipo tema d'esame del 12/07/2005 - C2]

Supponiamo che il numero medio di incidenti settimanali in un particolare tratto di autostrada sia pari a 3, calcolare la probabilità che la prossima settimana ci sia almeno un incidente.

[V.C. Poisson, 0.9502]

Esercizio

[Tema d'esame del 15/01/2019 - C6]

In un valico di montagna transitano in media 24 automobili in un'ora.
Calcolare la probabilità che in 2 minuti ne passino al più 2.

[V.C. Poisson, 0.95257]

Esercizio

[Tema d'esame PS sez. M-Z 04/09/2020-dom. 3]

Sia X una variabile casuale poissoniana di parametro λ . Sapendo che $P[X \geq 1] = \frac{2}{3}$, calcolare il valore di λ .

$$[\lambda = \ln 3]$$

Esercizio

[Tema d'esame PS sez. M-Z 26/01/2021-dom. 4]

In un libro, la percentuale delle pagine che contengono errori tipografici è del 13.5%. Supponendo che il numero di errori per pagina sia una variabile casuale con distribuzione di Poisson, determinare la % delle pagine che hanno esattamente 1 errore.

$$[12.5\%]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 21/12/2004 - 2]

Una media di 5.2 uragani colpisce ogni anno una certa regione degli Stati Uniti.

- 1 Con quale legge di distribuzione di probabilità si può studiare il problema?
- 2 Qual è la probabilità che ci siano al più 3 uragani all'anno?

[V.C. Poisson, 0.238]

Esercizio

Una grande azienda ha 150 impiegati, 12 dei quali hanno un alto tasso di assenteismo. All'avvicinarsi delle feste natalizie, l'azienda decide di assegnare 40 premi ad altrettanti impiegati estratti a sorte. Calcolare la probabilità che i premi vengano assegnati

- 1 a nessun impiegato assenteista;
- 2 a 3 impiegati assenteisti;
- 3 a meno di 5 assenteisti.

[V.C. Ipergeometrica, 0.020, 0.266, 0.814]

Esercizio

[Tema d'esame del 29/08/2016-C2]

In una scatola sono contenute 20 lampadine di cui 5 guaste. Calcolare la probabilità che in una successione di estrazioni indipendenti e ripetute la prima lampadina guasta estratta si abbia alla quinta estrazione.

[V.C. Geometrica, $3^4/4^5$]

Esercizio

[Tema d'esame del 29/08/2016-C5]

Se il tempo, in ore, necessario per riparare un macchinario è una variabile casuale esponenziale con parametro $\lambda = 2$, calcolare la probabilità condizionata che la riparazione richieda almeno 3 ore, sapendo che ne richiede più di 2.

$$[e^{-2}]$$

Esercizio

L'etichetta di uno sciroppo asserisce che la confezione contiene il 99 per cento di sciroppo di ciliegia. In effetti la percentuale di tale sciroppo presente nella bottiglia è una variabile casuale continua uniforme X con valori compresi tra 98,5 per cento e il 99,5 per cento. Qual è la probabilità che una bottiglia abbia

- 1 meno del 99 per cento di sciroppo di ciliegie?
- 2 più del 99,4 per cento di sciroppo di ciliegie?
- 3 esattamente il 99 per cento di sciroppo di ciliegie?

[V.C. Uniforme continua, 0.5, 0.1, 0]

Esercizio

[Tema d'esame del 28/06/2005 - C2]

Un'azienda ha una rete interna che permette l'accesso ad un massimo di 3 utenti contemporaneamente. Collegati a questa rete vi sono i terminali di 5 operatori, ognuno dei quali, ad un dato istante, richiede con la probabilità $p = \frac{3}{5}$ di essere connesso al calcolatore centrale. Qual è la probabilità che, ad un dato istante, un operatore non riesca a collegarsi (cioè, tutti e tre gli accessi sono già occupati)?

[V.C. Binomiale, 0.33696]

Esercizio

[2° Test -Tema d'esame del 03/06/2019 - C2]

Nel compiere la sua orbita un satellite impiega 1 giorno ed è mediamente colpito da 3 meteoriti (al giorno). Calcolare la probabilità che, nel percorrere 5 orbite, il numero di meteoriti che colpiscono il satellite non sia superiore a 3.

[V.C. Poisson, 0.00021]

Esercizio

[Tema d'esame del 13/12/2005 - C2]

Un contatore geiger registra il numero di raggi γ dovuti alla radiattività naturale emessi in un minuto. Sapendo che il valore medio al minuto di eventi registrati dal contatore è 5, qual è la probabilità che in un minuto il rilevatore segnali almeno un decadimento (scrivere il risultato con quattro decimali)?

[V.C. Poisson, 0.9933]

Esercizio

[Tema d'esame del 04/07/2019 - C3]

Il numero medio di buche con diametro maggiore di un certo valore nel manto stradale di una cittadina è pari a 0.2 per *km*. Si calcoli la probabilità che in un tratto a caso di 3 *km* ci sia almeno una buca.

$$[1 - e^{-0.6} \sim 0 : 451189]$$

Esercizio

Un meteorologo ritiene che la probabilità che a Brescia venga a piovere durante un giorno del mese di Aprile è 0,3.

- 1 Calcolare il numero di giorni di pioggia previsti dal meteorologo durante tutto il mese.
- 2 Determinare la probabilità che nel mese di Aprile vi siano al massimo 5 giorni di pioggia.

[V.C. Binomiale, 9, 0.0766]

Esercizio

Sia X una variabile casuale distribuita normalmente con media 3.1 e varianza 0.36. Si chiede di calcolare $P[3.7 < X \leq 4]$.

[0.09185]

Esercizio

[Tema d'esame del 15/04/2019 - C1]

Sia X una variabile casuale distribuita normalmente con media μ e varianza 1. Calcolare μ in modo tale che $P[2X - 3 > 0] = 0.02619$.

[−0.44]

Esercizio

[Tema d'esame del 04/07/2006 - C1]

Una variabile aleatoria X è distribuita normalmente con media 10000 e deviazione standard 50. Si chiede di calcolare $P[|X - 10000| > 76]$.

[0.12852]

Esercizio

[Tema d'esame del 15/01/2019 - C1]

Una variabile casuale X è distribuita normalmente con media 45 e deviazione standard 3. Si chiede di calcolare $P[|X - 45| < 3.96]$.

[0.81316]

Esercizio

[Tema d'esame del 04/07/2019 - C1]

Una variabile casuale X è distribuita normalmente con media μ e deviazione standard σ incognite. Determinare il valore di μ e σ sapendo che $P[X \geq 0.25] = 0.30854$ e $P[X \leq 1.25] = 0.81594$.

$$[\mu = -1; \sigma = 2.5]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 11/04/2006 - C3]

Il peso (la massa) di scatole di detersivo confezionate automaticamente si distribuisce normalmente. Sapendo che il peso medio è di 2,5 kg con uno scarto quadratico medio di 0,12 kg, determinare l'intervallo di peso entro il quale si concentra il 97 % delle scatole confezionate.

$[(2.2396, 2.7604)]$

Esercizio

Il peso alla nascita dei neonati italiani segue una legge normale di media $3,1 \text{ kg}$ e varianza $0,36 \text{ kg}^2$. Qual è la probabilità che un neonato scelto a caso abbia peso compreso tra $2,5 \text{ kg}$ e $2,7 \text{ kg}$? Qual è la probabilità che un neonato scelto a caso abbia peso minore di 2 kg ?

[0.092773, 0.03362]

Esercizio

Si sa che l'altezza degli uomini in Italia segue approssimativamente una variabile casuale normale di media 175 cm e deviazione standard 9 cm. Qual è la percentuale di italiani di statura superiore al metro e 90? Qual è la percentuale di italiani di statura inferiore al metro e 53?

[0.0475, 0.0073]

Esercizio

[Tema d'esame del 15/01/2018-C1]

Sia X una variabile casuale distribuita normalmente con media $\mu_X = 3$ e deviazione standard $\sigma_X = 2$. Posto $Y = aX + b$, ($a > 0$), calcolare i valori di a e di b affinché:

$$P[Y < -1.96] = P[Y > 1.96] = 0.025.$$

$$\left[a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2} \right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 19/06/2017-C1]

Un macchinario effettua un controllo di qualità su barre metalliche: esse vengono accettate se la lunghezza della barra è compresa tra 1.64 cm e 1.76 cm. Supposto che la lunghezza delle barre sia distribuita normalmente con media $\mu = 1.7$ cm e varianza $\sigma^2 = 0.16$ cm, calcolare la probabilità che una barra venga scartata.

[0.88076]

Esercizio

[Tema d'esame del 10/07/2017-C1]

Sia X una variabile casuale distribuita normalmente, con media $\mu_X = 1$ e varianza $\sigma_X^2 = \frac{16}{9}$. Posto $Y = aX + b$, ($a > 0$), calcolare la probabilità:

$$P[|Y - a - b| < 4a]$$

[0.9973]

Esercizio

[Tema d'esame del 28/08/2017-C1]

Sia X una variabile casuale distribuita normalmente, con media $\mu_X = 1$ e varianza $\sigma_X^2 = 1$. Posto $Y = aX + b$, ($a > 0$), determinare i valori di a e di b affinché risulti $\mu_Y = 4$ e $\sigma_Y = 4$.

$$[a = 4, b = 0]$$

Esercizio

[Tema d'esame PS sez. A-L 25/06/2020-dom. 1]

Sia X una variabile casuale distribuita normalmente, con media μ_X e varianza σ_X^2 e sia $Y = 3X + 2$. Sapendo che $P[Y > 2] = 0.2327$, determinare il rapporto tra la media μ_X di X e la deviazione standard σ_X di X .

$$\left[\frac{\mu_X}{\sigma_X} = -0.73 \right]$$

Esercizio

[Tema d'esame PS sez. A-L 16/07/2020-dom. 2]

L'altezza della popolazione maschile adulta in un certo paese ha distribuzione normale di media 174.2 cm e deviazione standard 3.2 cm. Si decide di fare uno screening medico sul 5% della popolazione più alta per prevenire delle patologie legate all'altezza. Qual è l'altezza minima degli uomini sottoposti a screening? (Approssimare alla prima cifra decimale)

[179.5cm]

Esercizio

[Tema d'esame del 26/08/2015-C4]

Sia X una variabile casuale distribuita normalmente con media -3 e varianza 4 . Si chiede di calcolare $P[X > -2.34 \mid X > -3]$.

[0.7414]

Esercizio

[Tema d'esame del 26/08/2015-C5]

La potenza W dissipata da una resistenza è proporzionale al quadrato della differenza di potenziale V ai suoi capi, ovvero $W = 5V^2$.

Supponiamo che V sia distribuita normalmente con media 2 e deviazione standard 1 . Calcolare $E[W]$.

[25]

Esercizio

[Tema d'esame del 21/03/2016-C1]

Data una popolazione in cui il 20% degli individui presenta una certa caratteristica A , calcolare la probabilità che un campione casuale di 10 individui, estratto con ripetizione, ne contenga più di 2 con la caratteristica A .

[V.C. Binomiale, 0.3222]

Esercizio

[Tema d'esame del 07/12/2004 - 3]

Le precipitazioni annuali di Roma sono approssimativamente una variabile aleatoria normale di media 40.2 centimetri e deviazione standard di 8.4 centimetri. Qual è la probabilità che

- 1 le precipitazioni dell'anno prossimo superino i 44 cm?
- 2 le precipitazioni dell'anno prossimo siano tra i 42 e 45 cm?
- 3 le precipitazioni annuali in esattamente 3 dei prossimi 7 anni eccedano i 44 cm?

[0.325496, 0.13129, 0.24983]

Esercizio

Una CPU impiega un tempo X per effettuare un certo tipo di operazione. Supponiamo che X sia una variabile casuale esponenziale di media $10 \mu s$.

- 1 Calcolare la probabilità che la CPU impieghi meno di $5 \mu s$.
- 2 Calcolare la probabilità che la CPU impieghi tra $5 \mu s$ e $10 \mu s$.
- 3 Calcolare la probabilità che l'operazione duri più di $10^{-2} ms$.
- 4 Calcolare $\text{var}[X]$.

[0.39347, 0.23865, 0.36788, 100]

Esercizio

Il tempo in ore necessario per riparare un macchinario è una variabile casuale aleatoria esponenziale con parametro $\lambda = 1$.

- 1 Calcolare la probabilità che la riparazione superi le 2 ore di tempo.
- 2 Calcolare la probabilità condizionata che la riparazione richieda almeno 3 ore, sapendo che ne richiede più di 2.

[0.13534, 0.36788]

Esercizio

[Esercizio tipo tema d'esame del 25/07/2006 - C3]

In un ufficio postale transitano, per un certo sportello, mediamente 90 persone ogni ora. Se l'operatore si deve allontanare per 5 minuti, qual è la probabilità che non arrivi nessuna persona in quei 5 minuti? Qual è la probabilità che arrivino 3 persone?

[0.000553, 0.03889]

Esercizio

[Tema d'esame del 22/03/2018 - C4]

Supponendo che la temperatura giornaliera nel mese di aprile sia una variabile casuale uniformemente distribuita sull'intervallo $[15^{\circ}\text{C}, 20^{\circ}\text{C}]$, calcolare la probabilità che in una settimana la temperatura superi i 17°C in 3 giorni su 7.

[0.1935]

Esercizio

Un investitore può investire su 3 delle 5 azioni raccomandate. L'investitore non è a conoscenza che solo 2 delle 5 azioni avrà un alto rendimento nei 5 anni successivi. Se la scelta dell'investitore è casuale:

- a) qual è la probabilità che i tipi scelti contengano i 2 ad alto rendimento?
- b) qual è la probabilità che vi sia soltanto 1 tipo dei 2 ad alto rendimento tra quelli scelti?
- c) qual è la probabilità che non vi siano tipi ad alto rendimento?

$$\left[\frac{3}{10}, \frac{3}{5}, \frac{1}{10} \right]$$

Esercizio

Un'impresa di prospezioni petrolifere intende effettuare una successione di perforazioni in una certa area, per trovare un pozzo produttore di petrolio. Ammettendo che in quell'area la probabilità di successo in una perforazione sia uguale a 0.2:

- 1 qual è la probabilità che la terza perforazione sia la prima a diventare un pozzo petrolifero?
- 2 Le risorse dell'impresa consentono di effettuare solo 3 perforazioni. Qual è la probabilità di trovare almeno un pozzo produttore di petrolio, date le risorse disponibili?
- 3 Calcolare, inoltre, la probabilità che il 5 pozzo si individui alla 10 perforazioni.

[0.128, 0.488, 0, 0132]

Esercizio

[Tema d'esame del 08/07/2015-C1]

Sia X una variabile casuale distribuita normalmente con media 6.3 e varianza 4. Calcolare $P[\sqrt[3]{X} \geq 2]$.

[0.19766]

Esercizio

[Tema d'esame del 08/07/2015-C3]

Il tempo di vita medio di un macchinario è distribuito esponenzialmente, con media pari a 400 ore. Calcolare la probabilità che il macchinario funzioni per almeno altre 100 ore, sapendo che ha lavorato correttamente per le prime 500 ore.

[0.77880]

Esercizio

Supponiamo che il numero di km percorsi da una automobile prima che la sua batteria sia esausta sia una variabile aleatoria esponenziale di media $10000 km$. Se una persona intende intraprendere un viaggio di $5000 km$ qual è la probabilità che lo porti a termine senza dover sostituire la batteria?

[0.60653]

Esercizio

In un arco di 20 anni, gli infortuni sul lavoro in una certa ditta si sono verificati secondo la tabella seguente.

| | | | | | | |
|------------------------|---|---|---|---|---|---|
| n° infortuni in 1 anno | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| frequenza in anni | 6 | 5 | 4 | 3 | 1 | 1 |

Approssimare con la distribuzione più adatta e determinare la probabilità che in un anno:

- 1 si verifichino al massimo 2 incidenti;
- 2 se ne verifichino 4 o più.

[V.C. Poisson, 0.796, 0.072]

Esercizio

[Tema d'esame del 13/01/2015-C2]

Da un'urna con 5 palline rosse, 6 palline verdi e 6 palline gialle, si eseguono 5 estrazioni con reimmissione. Sia T il numero di estrazioni che bisogna eseguire prima di ottenere una pallina verde. Calcolare la media di T , cioè $E[T]$.

[V.C. Geometrica : $\frac{17}{6}$]

Esercizio

[Tema d'esame del 21/03/2016-C3]

Una macchina confeziona sacchetti di caramelle, del peso medio di 200 g, con uno scarto quadratico medio di 10 g. Sapendo che ad un controllo vengono scartati i sacchetti con un peso inferiore a 185 g, calcolare quanti, su 1000 sacchetti, ne verranno scartati (approssimazione all'intero successivo).

[V.C. Normale : 67]

Esercizio

[esercizio tipo tema d'esame del 06/09/2005 - C2]

Da un'urna contenente 40 palline, di cui 8 bianche, si effettuano estrazioni con reinserimento fino ad ottenere per la prima volta una pallina bianca. Sia X la variabile casuale che denota il numero di estrazioni effettuate per ottenere la pallina bianca. Calcolare $P[X \geq 3]$ e $P[X > 3]$.

$$\left[\frac{16}{25}, \frac{64}{125} \right]$$

Esercizio

Studiando i limiti biologici un ricercatore registra l'istante in cui un criceto inizia ogni giorno la sua attività: egli osserva che varia tra le 5 : 35 e le 6 : 10 del mattino. Sia X la variabile che denota l'istante del risveglio, e si supponga costante la funzione densità di probabilità di X . Determinare la funzione f_X e il tempo medio di inizio attività.

$$\begin{cases} f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{35} & 5 : 35 \leq x \leq 6 : 10 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \\ E[X] = 5^h 52' 30'' \end{cases}$$

Esercizio

[Tema d'esame del 21/12/2004 - 3]

Il tempo di vita (in migliaia di chilometri) di un tipo di freno di automobili è distribuito normalmente con media 34 e deviazione standard 4.

- 1 Qual è la probabilità che un freno duri più di 40 migliaia di chilometri?
- 2 Qual è la probabilità che un freno di tale tipo duri tra 30 e 35 (migliaia di chilometri)?
- 3 Sapendo che un freno ha funzionato per 30 migliaia di chilometri, qual è la probabilità che esso funzioni ancora per 10 migliaia di chilometri?

[0.0668, 0.439, 0, 079]

Esercizio

[Tema d'esame del 22/12/2003 - 3]

Calcolare la media e la deviazione standard di una variabile aleatoria X , con distribuzione normale, tale che $P[X > -3] = 0,69146$ e $P[X < 2] = 0,97725$.

$$[\mu_X = -2, \sigma_X = 2]$$

Esercizio

Per trasmettere un messaggio binario ("0" oppure "1") da una sorgente A ad un ricevente B tramite un filo elettrico, si decide di mandare un segnale elettrico di 2 volt se si deve trasmettere il messaggio "1" e di -2 volt se si deve trasmettere il messaggio "0". A causa di disturbi nel canale, se A invia il segnale $x = \pm 2$, il ricevente B riceve un segnale $R = x + N$ dove N rappresenta il rumore del canale. Alla ricezione di un qualunque segnale R , si decodifica il messaggio con la seguente regola:

- se $R \geq 0,5$, si decodifica "1";
- se $R < 0,5$, si decodifica "0".

Sapendo che il rumore del canale ha distribuzione normale $N(0, 1)$, determinare la probabilità di decodificare erroneamente il messaggio.

[0.0365]

Esercizio

Una fabbrica produce resistori di valore nominale $10^3 \Omega$. La tolleranza è del 10 per cento. Supponiamo che i pezzi prodotti abbiano una resistenza distribuita (approssimativamente) come una normale di media $10^3 \Omega$ e varianza $2,5 \times 10^3 \Omega^2$. Qual è la probabilità che un pezzo scelto a caso sia da scartare?

[0.0455]

Esercizio

[Tema d'esame del 09/12/2003 - 3]

Sia X una variabile casuale distribuita secondo una normale con media 35 e deviazione standard 5. Calcolare $P[X < 25]$, $P[37.5 < X < 40]$, $P[32.5 < X < 37.5]$.

[0.02275, 0.14988, 0.38292]

Esercizio

Il tempo del manifestarsi di un guasto a stampanti a getto d'inchiostro prodotte da una ditta è distribuito normalmente con valore atteso di 1500 ore e deviazione standard di 200 ore . Si chiede di determinare:

- 1 la probabilità che una stampante si guasti prima di 1000 ore;
- 2 quale deve essere il tempo di garanzia se il produttore vuole che avvenga un guasto al più il 5 per cento delle volte prima della scadenza della garanzia stessa.

[0.00621, $t \leq 1171.02$ ore]