Probabilità e Statistica

Stima puntuale di parametri

Marco Pietro Longhi

C.d.L.: Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni, Ingegneria Informatica
a.s. 2020/2021

Esercizi

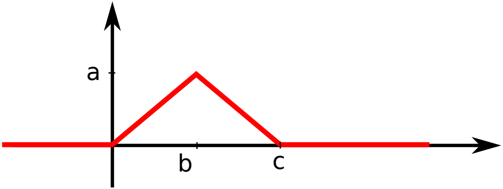
Esercizio

[Tratto dal tema d'esame del 05/07/2016-C6]
Si consideri per $\vartheta > 0$ la funzione definita da

$$f(x;\vartheta) = \begin{cases} \frac{4}{\vartheta^2}x & \text{se } 0 \le x \le \frac{\vartheta}{2} \\ \frac{4}{\vartheta^2}\cdot(\vartheta - x) & \text{se } \frac{\vartheta}{2} < x \le \vartheta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1. Verificare che per ogni $\vartheta > 0$, $f(\cdot;\vartheta)$ rappresenta una funzione di densità di probabilità.
2. Sia $X_1, X_2, \cdots, X_n$ un campione casuale estratto dalla popolazione di densità $f(\cdot,\vartheta)$, stabilire se $T = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ è uno stimatore corretto di ϑ.

Disegniamo il grafico della funzione di densità di probabilità data



1. Risulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;\vartheta)\,dx = \frac{1}{2}\vartheta\frac{2}{\vartheta} = 1$$

quindi $f(\cdot;\vartheta)$ rappresenta una funzione di densità di probabilità per ogni $\vartheta > 0$

1. T è uno stimatore **corretto** o **non distorto** di ϑ se $E[T] = \vartheta$.

   Nel nostro caso $E[X] = \frac{1}{2}\vartheta$ e

$$E[T] = E\left[\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] =$$

$$= \frac{2}{n} \cdot nE[X_i] = \frac{2}{n} n \frac{1}{2}\vartheta = \vartheta \Longrightarrow \text{lo stimatore è corretto}$$

Esercizio

Sia X la variabile casuale di Poisson di parametro λ,

1. determinare uno stimatore con il metodo dei momenti;
2. verificare la correttezza dello stimatore trovato;
3. calcolare l'errore quadratico medio;
4. supponendo poi di avere i seguenti dati campionati

$$2,\ 3,\ 2,\ 4,\ 3,\ 5,\ 4,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 4,\ 2,\ 3,\ 4,\ 3,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 4,\ 3,\ 3,\ 4$$

   calcolare il valore stimato di λ.

X ha funzione di densità di probabilità

$$f_X(x;\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & \text{se } x \in N \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Determiniamo uno stimatore **con il metodo dei momenti.**

Ricordiamo che con

$$M'_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r, \quad \mu'_r = E\left[X^r\right]$$

si indica, rispettivamente, il momento campionario assoluto di ordine r e il momento di ordine r della variabile casuale X. Il metodo dei momenti consiste nel risolvere il sistema nelle incognite $\vartheta_1, \cdots, \vartheta_k$ di k, numero dei parametri incogniti, equazioni

$$\begin{cases} \mu'_1 & = & M'_1 \\ \mu'_2 & = & M'_2 \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ \mu'_k & = & M'_k \end{cases}$$

Nel nostro caso abbiamo solo un parametro da stimare, λ, quindi calcoliamo

$$\mu_1' = E[X] = \lambda, \text{ e } M_1' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Posto $\mu_1' = M_1'$, risulta $\overline{\Lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Per determinare se lo stimatore è non distorto calcoliamo

$$E\left[\widehat{\Lambda}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\right] = E\left[\overline{X}_n\right] = \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}nE[X] = E[X]$$

Essendo X v.c. di Poisson di parametro λ, si ha $E[X] = \lambda$, quindi

$$E\left[\widehat{\Lambda}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\right] = \lambda \Longrightarrow \widehat{\Lambda} \text{ stimatore non distorto}$$

Chiamiamo **errore quadratico medio** di uno stimatore $T = t\,(X_1, \cdots, X_2)$, la funzione di ϑ data da:

$$\mathrm{MSE}\,[T]\,(\vartheta) := E\left[(T - \tau(\vartheta))^2\right]$$

con $\tau(\vartheta)$ funzione del parametro da stimare. Ma

$$\mathrm{MSE}\,[T]\,(\vartheta) := \mathrm{var}\,[T] + [D\,[T]\,(\vartheta)]^2\,, \quad D\,[T]\,(\vartheta) := \tau(\vartheta) - E\,[T]$$

Nel nostro caso $E\left[\widehat{\Lambda}\right] = \lambda \Longrightarrow D\left[\widehat{\Lambda}\right] = 0$, quindi

$$MSE\left[\widehat{\Lambda}\right] = \mathrm{var}\left[\widehat{\Lambda}\right] = \mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] \underbrace{=}_{X_i\ ind.} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}\,[X_i] = \frac{1}{n^2} \cdot n\lambda = \frac{\lambda}{n}$$

Troviamo λ mediante i dati campionari

$$\widehat{\lambda} = \frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 2}{24} = \frac{77}{24} \approx 3,2083$$

Esercizio

Sia $X_1, \; X_2 \; \dots X_n$ un campione casuale di ampiezza n estratto da una popolazione con distribuzione uniforme nell'intervallo $[a-b, a+b]$. Determinare gli stimatori di a e b con il metodo dei momenti.

L'intervallo ha ampiezza $a+b-(a-b)=2b$, ne segue che la funzione di densità di probabilità della v.c. X è

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{2b} & \text{se } a-b \le x \le a+b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Per determinare gli stimatori di $a, \; b$ con il metodo dei momenti, bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} \mu_1' & = & M_1' \\ \mu_2' & = & M_2' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mu_1' & = & \overline{X}_n \\ \mu_2' & = & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$$

Calcoliamo $\mu'_1 = \frac{a+b+a-b}{2} = a$ e

$$\mu'_2 = \mathrm{var}[X] + (\mu'_1)^2 = \frac{[(a+b)-(a-b)]^2}{12} + a^2 = \frac{b^2}{3} + a^2$$

Sostituendo

$$\begin{cases} a = \overline{X}_n \\ \frac{b^2}{3} + a^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$$

ed eseguendo alcuni passaggi algebrici, ne segue che gli stimatori cercati sono

$$\widehat{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ \text{ e } \ \widehat{b} = \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{3}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}$$

Esercizio

[Tratto dal tema d'esame del 29/08/2016-C6]
Si supponga che X_1 , X_2, X_3 sia un campione casuale di ampiezza 3 estratto da una distribuzione esponenziale di media λ. Si considerino i seguenti stimatori del parametro λ:

$$\Lambda_1 = X_1, \ \Lambda_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \ \Lambda_3 = \frac{X_1 + 2X_2}{3}, \ \Lambda_4 = \overline{X}_3$$

1. Indicare quali sono gli stimatori non distorti di λ.
2. Individuare tra gli stimatori non distorti quello con MSE minimo.

Sia X una v.c. esponenziale di media λ, si ha

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0 & \quad\quad \text{altrove} \end{cases}$$

con $E[X] = \lambda$ e $\text{var}[X] = \lambda^2$.
Calcoliamo il valore atteso degli stimatori dati

$$E[\Lambda_1] = E[X_1] = \lambda$$

$$E[\Lambda_2] = E\left[\frac{X_1 + X_2}{2}\right] = \frac{1}{2}(E[X_1] + E[X_2]) = \frac{1}{2} \cdot 2\lambda = \lambda$$

$$E[\Lambda_3] = E\left[\frac{X_1 + 2X_2}{3}\right] = \frac{1}{3}(E[X_1] + 2E[X_2]) = \frac{1}{3} \cdot (\lambda + 2\lambda) = \lambda$$

$$E[\Lambda_4] = E\left[\overline{X}_3\right] = \lambda$$

Tutti gli stimatori dati sono non distorti, per individuare il preferibile, calcoliamo la varianza di ciascuno:

$$\mathrm{var}\left[\Lambda_1\right] = \mathrm{var}\left[X_1\right] = \lambda^2$$

$$\mathrm{var}\left[\Lambda_2\right] = \mathrm{var}\left[\frac{X_1 + X_2}{2}\right] = \frac{1}{4}\left(\mathrm{var}\left[X_1\right] + \mathrm{var}\left[X_2\right] + 2\mathrm{cov}\left[X_1, X_2\right]\right) =$$

$= \frac{1}{4} \cdot 2\lambda^2 = \frac{1}{2}\lambda^2$ (X_1 e X_2 sono indipendenti)

$$\mathrm{var}\left[\Lambda_3\right] = \mathrm{var}\left[\frac{X_1 + 2X_2}{3}\right] = \frac{1}{9}\left(\mathrm{var}\left[X_1\right] + 4\mathrm{var}\left[X_2\right]\right) = \frac{1}{9}\cdot\left(\lambda^2 + 4\lambda^2\right) = \frac{5}{9}\lambda$$

$$\mathrm{var}\left[\Lambda_4\right] = \mathrm{var}\left[\overline{X}_3\right] = \frac{1}{3}\lambda^2$$

Lo stimatore non distorto con varianza minima è la media campionaria.

Esercizio

[Tema d'esame del 17/06/2019 - C7] Sia X_1, X_2, X_3 un campione casuale di dimensione 3 estratto da una popolazione normale con media μ e varianza σ^2. Dati i seguenti stimatori del parametro μ

$$\overline{X}_3 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}\,, \qquad T = \frac{1}{5}X_1 + \frac{1}{5}X_2 + \frac{3}{5}X_3\,,$$

stabilire quale sia il più efficiente.

$\left[\overline{X}_3\right]$

Esercizio

[Tema d'esame del 08/07/2019 - C6]
Da una popolazione con distribuzione uniforme sull'intervallo $[a, b]$, con a e b parametri incogniti ($a < b$), si estrae un campione casuale di dimensione n, dal quale si ricava che la media campionaria e il momento campionario di ordine 2 hanno i seguenti valori:

$$\overline{X}_n = 2\,, \quad M_2' = 5.$$

Utilizzando il metodo dei momenti, stimare i parametri incogniti a e b.

$$\left[a = 2 - \sqrt{3}\,; b = 2 + \sqrt{3}\right]$$

Esercizio

Il numero di interruzioni (crash) di un personal computer segue una distribuzione di Poisson di parametro λ. Sia $X_1, \ X_2 \ \ldots X_n$ un campione casuale di ampiezza n estratto dalla distribuzione di Poisson data. Se il costo di riparazione è dato da

$$Y_n = 3\overline{X}_n + \overline{X}_n^{\,2}$$

dove $\overline{X}_n$ è la media campionaria su n crash, calcolare $E\left[Y_\infty\right]$.

Sia X una v.c. di Poisson di parametro λ, si ha

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} & \text{se} \quad x = 0, 1, 2, 3 \ldots \\ 0 & \quad\quad\ \ \text{altrove} \end{cases}$$

con $E[X] = \lambda$ e $\mathrm{var}[X] = \lambda$.

Calcoliamo il valore atteso dello stimatore dato

$$E\left[Y_n\right] = E\left[3\overline{X}_n + \overline{X}_n^2\right] = 3E\left[\overline{X}_n\right] + E\left[\overline{X}_n^2\right] = 3\lambda + E\left[\overline{X}_n^2\right]$$

Ma

$$E\left[\overline{X}_n^2\right] - E\left[\overline{X}_n\right]^2 = \mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right], \quad \mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] = \frac{\mathrm{var}\left[X\right]}{n} = \frac{\lambda}{n},$$

quindi

$$E\left[Y_n\right] = 3\lambda + \frac{\lambda}{n} + \lambda^2$$

e passando al limite per $n \longrightarrow \infty$ si ha

$$E\left[Y_\infty\right] = 3\lambda + \lambda^2$$

Esercizio (Tema d'esame del 04/07/2019 - C5)

Sia $X_1, \ldots X_n$ un campione casuale estratto da una popolazione i cui elementi si distribuiscono con una funzione di densità data da

$$f_X(x, \vartheta) = \begin{cases} \vartheta^2 x\, e^{-\vartheta x} & \text{se } x \in (0, +\infty) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $\vartheta > 0$. Determinare uno stimatore T di ϑ con il metodo dei momenti.

$$\left[T = \frac{2}{\overline{X}_n} \right]$$

Esercizio

$X_1,\ X_2\ \ldots X_n$ un campione casuale proveniente da una distribuzione rettangolare nell'intervallo $[0,\ 2\vartheta]$ con $\vartheta > 0$.

1. Si determini lo stimatore di ϑ con il metodo dei momenti.
2. Si verifichi se tale stimatore è consistente.

L'intervallo ha ampiezza $2\vartheta - 0 = 2\vartheta$, ne segue che la funzione di densità di probabilità della v.c. rettangolare X è

$$f(x;\vartheta) = \begin{cases} \frac{1}{2\vartheta} & \text{se } 0 \leq x \leq 2\vartheta \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Per determinare lo stimatore di ϑ con il metodo dei momenti, bisogna risolvere l'equazione

$$\mu_1' = M_1' \Longrightarrow \mu_1' = \overline{X}_n,$$

rispetto a ϑ.

Calcoliamo $\mu_1' = \frac{0+2\vartheta}{2} = \vartheta$, sostituendo nell'equazione precedente risulta $\overline{X}_n$ uno stimatore di ϑ. Essendo $E\left[\overline{X}_n\right] = \vartheta$, lo stimatore è non distorto.

Calcoliamo

$$\operatorname{var}\left[\overline{X}_n\right] \underbrace{=}_{X_i \text{ indip.}} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}\left[X_i\right] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \frac{\vartheta^2}{3} = \frac{\vartheta^2}{3n}.$$

Ne segue

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} E\left[\left(\overline{X}_n - \vartheta\right)^2\right] = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\vartheta^2}{3n} = 0,$$

quindi lo stimatore è consistente.

Esercizio (Tema d'esame del 10/01/2006 - E2)

Sia $X_1, \; X_2 \; \ldots X_n$ un campione casuale di ampiezza n estratto da una popolazione con densità di probabilità

$$f_X(x,\vartheta) = \begin{cases} \frac{2}{\vartheta}\left(1 - \frac{x}{\vartheta}\right) & \text{se } 0 \le x \le \vartheta \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

con $\vartheta > 0$.

1. Determinare uno stimatore T di ϑ con il metodo dei momenti.
2. Stabilire se T è distorto e calcolarne l'errore quadratico medio.

Individuiamo lo stimatore T del parametro ϑ, risolvendo rispetto a ϑ

$$\overline{X}_n = E[X].$$

Calcoliamo

$$E[X] = \int_0^{\vartheta} \frac{2}{\vartheta} x \left(1 - \frac{x}{\vartheta}\right) dx = \frac{1}{3}\vartheta$$

quindi

$$\overline{X}_n = \frac{1}{3}\vartheta \Longrightarrow T = 3\overline{X}_n.$$

Lo stimatore è non distorto, infatti, $E\left[3\overline{X}_n\right] = 3E\left[\overline{X}_n\right] = 3\frac{\vartheta}{3} = \vartheta$
Calcoliamo, infine, l'errore quadratico medio

$$\mathrm{MSE}[T] = \mathrm{var}[T] = \mathrm{var}\left[3\overline{X}_n\right] = 9\frac{\mathrm{var}[X]}{n}.$$

$$E\left[X^2\right] = \int_0^{\vartheta} \frac{2}{\vartheta} x^2 \left(1 - \frac{x}{\vartheta}\right) dx = \frac{\vartheta^2}{6} \Longrightarrow \mathrm{var}[X] = \frac{\vartheta^2}{6} - \frac{\vartheta^2}{9} = \frac{\vartheta^2}{18}.$$

Ne segue $\mathrm{MSE}[T] = \frac{\vartheta^2}{2n}$.

Esercizio (Tratto dal tema d'esame del 12/01/2016-C6 e tema d'esame del 13/06/2018 - C8)

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale, di dimensione n, estratto da una distribuzione rettangolare uniforme sull'intervallo $[a, 2a]$.

1. Determinare uno stimatore T_1 di a con il metodo dei momenti. Verificare se lo stimatore T_1 è distorto e calcolarne l'errore quadratico medio $MSE[T_1]$.
2. Considerato poi lo stimatore $T_2 = \dfrac{1}{2}X_1 + \dfrac{1}{6}X_2$, verificare se T_2 è distorto e calcolarne l'errore quadratico medio $MSE[T_2]$.
3. Supposto $n = 3$, quale dei due stimatori T_1 e T_2 di a è preferibile (giustificare la risposta)?

$$\left[\begin{array}{l} T_1 = \frac{2}{3}\overline{X}_n \\ T_1 \text{ non distorto} \\ MSE[T_1] = \frac{a^2}{27n} \\ T_2 \text{ non distorto} \\ MSE[T_2] = \frac{5a^2}{216} \\ T_1 \text{ preferibile} \end{array}\right]$$

Esercizio

[Tratto dal Tema d'esame del 04/07/2006 - E1 e Tema d'esame del 27/08/2018 - C8]

Sia $X_1, \ldots, X_8$ un campione aleatorio, di dimensione 8, estratto da una distribuzione rettangolare uniforme sull'intervallo $[-1, b]$, con $b > -1$. Si chiede:

1. determinare uno stimatore T_1 di b con il metodo dei momenti;
2. determinare se lo stimatore T_1 sia distorto;
3. calcolare l'errore quadratico medio $\mathrm{MSE}[T_1]$;
4. considerato poi lo stimatore $T_2 = 4\overline{X}_8 - X_3 - X_5 + 1$, calcolarne l'errore quadratico medio $\mathrm{MSE}[T_2]$;
5. determinare quale dei due stimatori T_1 e T_2 di b sia preferibile, giustificando la risposta.

$$\begin{bmatrix} T_1 = 2\overline{X}_8 + 1 \\ T_1 \text{ non distorto} \\ MSE[T_1] = \frac{(b+1)^2}{24} \\ MSE[T_2] = \frac{(b+1)^2}{3} \\ T_1 \text{ preferibile} \end{bmatrix}$$

Esercizio

[2° Test d'esame del 13/06/2018 - C5]
Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale di ampiezza n, estratto da una distribuzione continua uniforme nell'intervallo $[a-2, 2a+3]$ con $a > 1$. Determinare uno stimatore di a con il metodo dei momenti.

$$\left[T = \frac{2\overline{X}_n - 1}{3} \right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 23/06/2014 - C3]
Sia $X_1, ..., X_n$, $n \geq 2$, un campione casuale estratto dalla funzione di densità di probabilità

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{3}{4\theta\sqrt{2\theta}}\sqrt{x} & 0 < x < 2\theta, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

$\theta > 0$. Determinare uno stimatore T di θ con il metodo dei momenti.

$$\left[T = \frac{5}{6}\overline{X}_n\right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 15/01/2019 - C7]
Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale di ampiezza n estratto da una popolazione distribuita con densità di probabilità

$$f_X(x, \theta) = \begin{cases} 8^{-\theta}\, \theta\, x^{\theta-1} & \text{se } 0 < x < 8, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

con $\theta \in \mathbb{R}^+$. Si determini lo stimatore $\hat{\theta}$ del parametro θ con il metodo dei momenti.

$$\left[\hat{\theta} = \frac{\bar{X}_n}{8 - \bar{X}_n}\right]$$

Esercizio

[Tema d'esame PS sez. A-L 25/06/2020-dom. 4]
Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale di ampiezza n estratto da una popolazione distribuita con densità di probabilità

$$f_X(x, \theta) = \begin{cases} \dfrac{6}{\theta^2}\, x \left(1 - \dfrac{x}{\theta}\right) & \text{se } x \in (0, \theta), \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

Determinare uno stimatore T di θ con il metodo dei momenti.

$$\left[T = 2\,\overline{X}_n\right]$$

Esercizio

[Tema d'esame MZ sez. A-L 04/09/2020-dom. 5]
Sia $X_1, \ldots, X_5$ un campione casuale di dimensione 5 estratto da una popolazione con distribuzione rettangolare uniforme sull'intervallo $[\theta, 2\theta]$. Calcolare l'errore quadratico medio dello stimatore $\hat{\theta}$, ottenuto con il metodo dei momenti, del parametro θ.

$$\left[\frac{\theta^2}{135}\right]$$