# 12 Stima per intervalli

Anche se la precisione della stima aumenta con grandi campioni, non è vero che una stima puntuale, valore specifico di una statistica calcolata in corrispondenza di un dato campione, sia esattamente uguale al parametro della popolazione che si intende stimare.
A volte è preferibile determinare un intervallo per il quale si ha un certo livello di fiducia o confidenza che il parametro vi appartenga.
Quindi una stima per intervallo è un intervallo costruito attorno allo stimatore puntuale (di cui si conosce la distribuzione di probabilità) in modo che sia nota e fissata a priori la probabilità che il parametro vero appartenga all'intervallo stesso.
Tale probabilità è detta LIVELLO DI CONFIDENZA e viene indicato con $(1-\alpha)\%$ dove $\alpha \in (0,1)$ è la probabilità che il parametro si trovi al di fuori dell'intervallo di confidenza.
Nel caso di un campione casuale semplice di dimensione $n$, estratto da una popolazione normale $N(\mu, \sigma^2)$ si possono costruire intervalli di confidenza al livello

$(1-\alpha)\%$ sia per la media $\mu$ (con $\sigma$ nota o incognita) sia per la varianza $\sigma^2$ (con $\mu$ nota o incognita)

## 1 INTERVALLO DI CONFIDENZA PER LA MEDIA $\mu$ QUANDO LA VARIANZA $\sigma^2$ È NOTA

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ , $i = 1, ..., n \Rightarrow \overline{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

La variabile casuale

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

è indipendente da $\mu$ e quindi è la statistica idonea per costruire l'intervallo per $\mu$, essendo $\sigma$ nota.

Si possono costruire intervalli bilaterali e unilaterali destro e sinistro.

### INTERVALLO BILATERALE

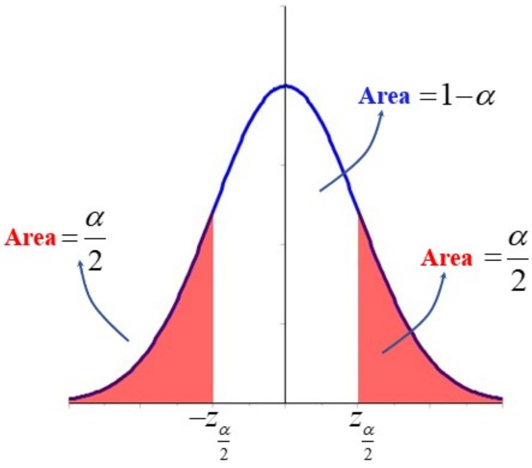



Figura 39

$\forall \alpha \in (0,1)\ z_{\frac{\alpha}{2}} : P[Z_n > z_{\frac{\alpha}{2}}] = \frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow P[-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z_n < z_{\frac{\alpha}{2}}] = 1 - \alpha$

Sostituendo $Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

$$P[-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}] = 1 - \alpha$$

ovvero

$$P[\overline{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}] = 1 - \alpha$$

$$\rightarrow I = \left(\overline{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

intervallo di confidenza bilat. al livello $(1-\alpha)$ per $\mu$

La lunghezza dell'intervallo bilaterale è

$$\ell_I = 2 z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- se $n$ aumenta, $\ell_I$ cala $\Rightarrow$ stima più precisa.
- se $(1-\alpha)$ aumenta, $z_{\frac{\alpha}{2}}$ aumenta, $\ell_I$ aumenta $\Rightarrow$ la stima è meno precisa.
- se $\sigma$ aumenta, $\ell_I$ aumenta.

$(n, \alpha)$ si possono controllare, $\sigma$ dipende dai dati.

# INTERVALLI UNILATERALI

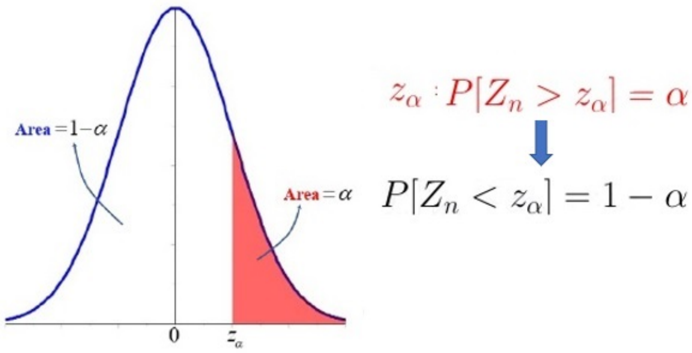



Figura 40

$$\frac{\overline{X}_n-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_\alpha \Rightarrow \mu > \overline{X}_n - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\rightarrow \left(\overline{X}_n - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty\right)$$

intervallo unilaterale destro per $\mu$ al livello $(1-\alpha)$.

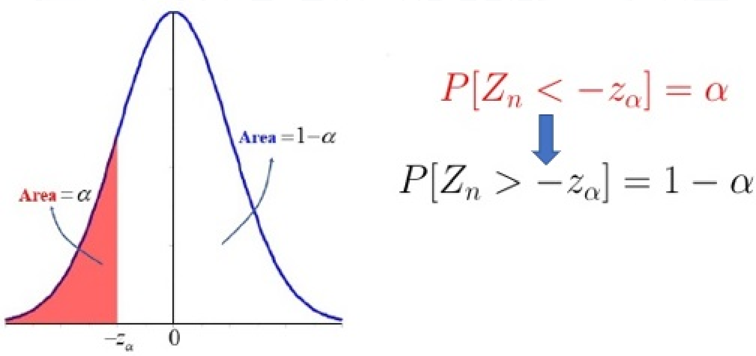



Figura 41

$$\frac{\overline{X}_n-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > -z_\alpha \Rightarrow \mu < \overline{X}_n + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\rightarrow \left(-\infty, \overline{X}_n + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

intervallo unilaterale sinistro per $\mu$ al livello $(1-\alpha)$.

OSSERVAZIONE
Se viene a mancare l'ipotesi che la distribuzione della popolazione sia normale, a condizione che $n$, la dimensione del campione, sia sufficientemente grande, in accordo con il Teorema del Limite Centrale ($n \geq 30$)

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \dot{\sim} N(0,1)$$

e si possono costruire ugualmente gli intervalli di confidenza.

<u>Esempio</u>
Vogliamo calcolare

$$P[-1.96 < Z_n < 1.96] = \int_{-1.96}^{1.96} \varphi(z)dz =$$
$$2\int_{0}^{1.96} \varphi(z)dz = 2\left(\int_{-\infty}^{1.96} \varphi(z)dz - 0.5\right) = \text{(tabella)}$$
$$= 2(0.975 - 0.5) = 2 \cdot 0.475 = 0.95$$

è equivalente a

$$P\left[\overline{X}_n - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X}_n + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = (1-\alpha) = 0.95$$

intervallo di confidenza bilaterale al 95% per $\mu$.
Il 95% delle volte $\mu$ si troverà ad una distanza non superiore a $(1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ dalla media campionaria dei dati.
Posso concludere che col 95% di confidenza la media $\mu$ della popolazione appartiene ad

$$I = \left(\overline{X}_n - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$(1-\alpha) = 0.95$
$\alpha = 0.05$, $\frac{\alpha}{2} = 0.025$
$1.96 = z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025}$

Voglio calcolare:

$$P[Z_n < 1.645] = \int_{-\infty}^{1.645} \varphi(z)dz = \text{(tabella)} = 0.95$$

è equivalente a

$$P\left[\overline{X}_n - 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu\right] = 0.95$$

intervallo di confidenza unilaterale destro al 95%, cioè

$$I = \left(\overline{X}_n - 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty\right)$$

$(1 - \alpha) = 0.95$
$\alpha = 0.05$
$z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$
L'intervallo di confidenza unilaterale sinistro al 95% sarà:

$$I = \left(-\infty, \overline{X}_n + 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

LIVELLI DI CONFIDENZA COMUNI

$$1 - \alpha = 90\% \Rightarrow \alpha = 0.1 \quad \begin{cases} z_\alpha = z_{0.1} = 1.28 \\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.05} = 1.645 \end{cases}$$

$$1 - \alpha = 95\% \Rightarrow \alpha = 0.05 \quad \begin{cases} z_\alpha = z_{0.05} = 1.645 \\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96 \end{cases}$$

$$1 - \alpha = 99\% \Rightarrow \alpha = 0.01 \quad \begin{cases} z_\alpha = z_{0.01} = 2.326 \\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.005} = 2.58 \end{cases}$$

OSSERVAZIONE
Ci possono essere diversi intervalli di confidenza bilaterali che hanno lo stesso livello di confidenza.
$P[-1.96 < Z_n < 1.96] = 0.95$
ma anche
$P[-1.68 < Z_n < 2.70] = 0.95$

Problema: quale intervallo è migliore?
Si sceglie l'intervallo più corto.
Si può dimostrare che l'intervallo simmetrico rispetto ad $\overline{X}_n$ è quello che rende minima l'ampiezza dell'intervallo bilaterale $I_{\text{bil}}$.

Esempio

Sia dato un campione casuale di dimensione $n = 4$, estratto da una popolazione normale $N(\mu, \sigma = 3)$.
DATI: 1.2, 3.4, 0.6, 5.6
$\overline{x}_n = \overline{x}_4 = 2.7$ è la stima per $\mu$.
L'intervallo bilaterale simmetrico al 95% per $\mu$ è:

$$\left(2.7 - 1.96 \cdot \frac{3}{2}, 2.7 + 1.96 \cdot \frac{3}{2}\right) = (-0.24, 5.64)$$

e $\ell_I = 5.88$
Se usiamo $P[-1.68 < Z_n < 2.70] = 0.95$ ricaviamo:

$$\left(2.7 - 2.7 \cdot \frac{3}{2}, 2.7 + 1.68 \cdot \frac{3}{2}\right) = (-1.35, 5.22)$$

e $\ell_I = 6.57$ è più ampio

Gli intervalli unilaterali in corrispondenza a $z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$ saranno

$(0.23, +\infty)$ destro, $(-\infty, 5.16)$ sinistro.

In alcune situazioni si richiede che l'intervallo di confidenza bilaterale abbia una lunghezza fissata.

Problema: determinare la numerosità del campione che garantisca il risultato richiesto.

Da $\ell_I = 2z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(2z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\ell_I}\right)^2$
(si approssima all'intero successivo).

<u>Esempio</u>
Dato un campione casuale estratto da una popolazione normale $N(\mu, \sigma = 0.2)$, calcolare $n$ affinchè l'intervallo di confidenza bilaterale al 99% per $\mu$ abbia lunghezza $\ell_I = 0.1$.

$1 - \alpha = 0.99, \Rightarrow \alpha = 0.01, \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.005} = 2.58.$
$\ell_I = 2 \cdot z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot 2.58 \cdot \frac{0.2}{\sqrt{n}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{5.16 \cdot 0.2}{0.1}\right)^2 \simeq 106.5 \Rightarrow n = 107$$

## ② INTERVALLO DI CONFIDENZA PER LA MEDIA $\mu$ QUANDO LA VARIANZA $\sigma^2$ NON È NOTA

Non è più possibile in questo caso usare la variabile casuale $Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ poichè contiene l'incognita $\sigma$ e quindi non è una statistica.
Bisogna usare la statistica

$$T = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1} \quad \text{(TH. 5)}$$

In analogia al caso ① si costituiscono gli intervalli di confidenza bilaterali e unilaterali destro e sinistro al livello $(1-\alpha)\%$, $\forall \alpha \in (0,1)$ sostituendo alla deviazione standard $\sigma$ della popolazione la deviazione campionaria standard $S$ e ai percentili della normale standard $Z$ i percentili della $t$ di Student al grado di libertà $(n-1)$.

$$I = \left(\overline{X}_n - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$ intervallo bilaterale per $\mu$

$$\left(\overline{X}_n - t_{\alpha,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}, +\infty\right)$$ intervallo unilat. dx per $\mu$

$$\left(-\infty, \overline{X}_n + t_{\alpha,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$ intervallo unilat. sx per $\mu$

Quando $\sigma$ non è nota, l'intervallo costruito attraverso la $t$ di Student è più ampio poichè le code della $t$ sono più pesanti.

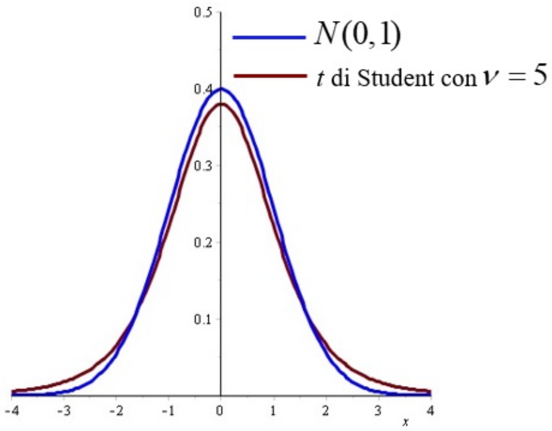



Figura 42

Esempio

Sia dato un campione casuale di dimensione $n = 4$ estratto da una popolazione normale $N(\mu, \sigma^2)$. Determinare un intervallo di confidenza bilaterale al 95% per $\mu$.

DATI: 1.2, 3.4, 0.6, 5.6

$\overline{x}_n = \overline{x}_4 = 2.7$

$s^2 = \frac{1}{3}\left[(1.2)^2 + (3.4)^2 + (0.6)^2 + (5.6)^2 - 4 \cdot (2.7)^2\right]$

$\downarrow$

$s \simeq 2.277$

$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

$t_{\frac{\alpha}{2},n-1} = t_{0.025,3} = \text{(tabella)} = 3.182$
$\ell_I = 2t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \Rightarrow \ell_I = 2 \cdot 3.182 \cdot \frac{2.277}{2}$
$\Rightarrow \ell_I = 7.25$ (più ampio rispetto a 5.88 calcolato quando $\sigma$ è nota)

OSSERVAZIONE
Nella pratica si costruiscono gli intervalli di confidenza per $\mu$ quando $\sigma$ non è nota per mezzo della $t$ di Student solo per piccoli campioni ($n \leq 30$). Per grandi campioni si usa invece la normale standard $Z_n$ sostituendo alla $\sigma$ incognita la $S$ calcolata dai dati.

## ③ INTERVALLO DI CONFIDENZA PER LA VARIANZA $\sigma^2$ QUANDO LA MEDIA $\mu$ NON È NOTA

Una stima per $\sigma^2$ può essere determinata usando la statistica

$$V = (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}, \quad \text{(TH. 4)}$$

# INTERVALLO BILATERALE

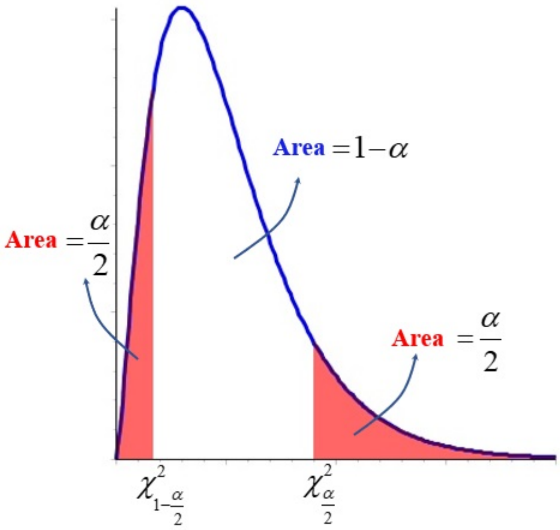



Figura 43

$$P\left[\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} < V < \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right] = 1-\alpha$$

sostituendo $V$ si ha

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$$

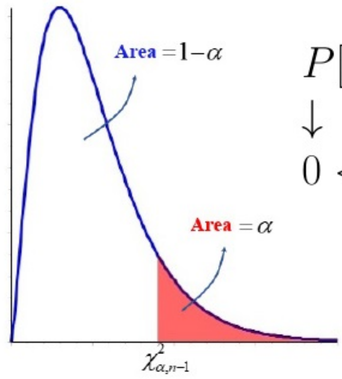
cioè

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right)$$

intervallo bilaterale per $\sigma^2$ quando $\mu$ non è nota

# INTERVALLI UNILATERALI



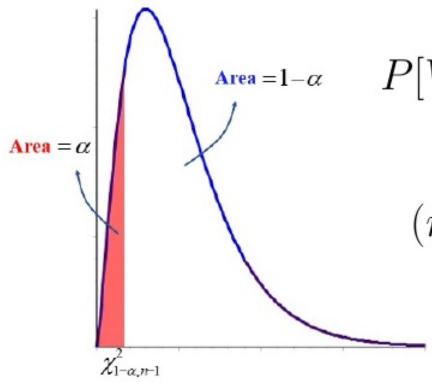

$$P[0 < V < \chi^2_{\alpha,n-1}] = 1-\alpha$$
$$\downarrow$$
$$0 < (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha,n-1}$$

Figura 44

$$\Rightarrow \sigma^2 > (n-1)\frac{S^2}{\chi^2_{\alpha,n-1}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha,n-1}}, +\infty\right)$$

intervallo unilaterale destro per $\sigma^2$ quando $\mu$ non è nota




$$P[V > \chi^2_{1-\alpha,n-1}] = 1-\alpha$$
$$\downarrow$$
$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{1-\alpha,n-1}$$

Figura 45

$$\Rightarrow \sigma^2 < (n-1)\frac{S^2}{\chi^2_{1-\alpha,n-1}}$$

$$\Rightarrow \left(0, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha,n-1}}\right)$$

intervallo unilaterale sinistro per $\sigma^2$ quando $\mu$ non è nota

Esempio

Dato un campione casuale di dimensione $n = 10$, di rondelle di spessore ridotto, estratto da una popolazione normale $N(\mu, \sigma^2)$, stimare $\sigma^2$ con $\mu$ non nota.

DATI: spessori

0.123, 0.133, 0.124, 0.125, 0.126

0.128, 0.120, 0.124, 0.130, 0.126

$$\Rightarrow \overline{x}_n = \overline{x}_{10} = 0.125$$

$$s^2 = \frac{1}{9}\left[(0.123^2 + 0.133^2 + \ldots + 0.126^2) - 10 \cdot 0.125^2\right]$$
$$\simeq 1.366 \cdot 10^{-5}$$

Vogliamo determinare un intervallo di confidenza bilaterale per $\sigma^2$ al 90%.

$$1 - \alpha = 0.90,\ \alpha = 0.1,\ \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05,\ 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95$$

$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{0.05,9} = 16.919$

$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{0.95,9} = 3.325$

quindi

$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}$

diventa

$\frac{9 \cdot 1.366 \cdot 10^{-5}}{16.919} < \sigma^2 < \frac{9 \cdot 1.366 \cdot 10^{-5}}{3.325}$

$\Rightarrow (7.26 \cdot 10^{-6}, 36.97 \cdot 10^{-6})$ è l'intervallo bilaterale per $\sigma^2$.

## ④ INTERVALLO DI CONFIDENZA PER LA VARIANZA $\sigma^2$ QUANDO LA MEDIA $\mu$ È NOTA

In questo caso si può usare la statistica

$$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n, \quad \text{(TH. 3)}$$

e ragionare come nel caso ③, sostituendo alla statistica $V$ la statistica $U$ (il grado di libertà ora è $n$).

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n}}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n}}\right)$$ intervallo bilaterale per $\sigma^2$ quando $\mu$ è nota

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha,n}}, +\infty\right)$$ intervallo unilaterale destro per $\sigma^2$ quando $\mu$ è nota

$$\left(0, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha,n}}\right)$$ intervallo unilaterale sinistro per $\sigma^2$ quando $\mu$ è nota

Intervalli con livello di confidenza $1-\alpha$ per campioni normali.

$$X_1, X_2, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad S := \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2\right)^{1/2}$$

| Ipotesi | $\theta$ | Intervallo bilaterale | Intervallo sinistro | Intervallo destro |
|---|---|---|---|---|
| $\sigma^2$ nota | $\mu$ | $\overline{X}_n \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | $\left(-\infty, \overline{X}_n + z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ | $\left(\overline{X}_n - z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right)$ |
| $\sigma^2$ non nota | $\mu$ | $\overline{X}_n \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}$ | $\left(-\infty, \overline{X}_n + t_{\alpha,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$ | $\left(\overline{X}_n - t_{\alpha,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}, \infty\right)$ |
| $\mu$ non nota | $\sigma^2$ | $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right)$ | $\left(0, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha,n-1}}\right)$ | $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha,n-1}}, \infty\right)$ |
| $\mu$ nota | $\sigma^2$ | $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n}}, \frac{\cdot}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n}}\right)$ | $\left(0, \frac{\cdot}{\chi^2_{1-\alpha,n}}\right)$ | $\left(\frac{\cdot}{\chi^2_{\alpha,n}}, \infty\right)$ |

Figura 46

## SCHEMA

STIMA PER $\mu$

- se $\sigma$ è nota $\Rightarrow N(0,1)$
- se $\sigma$ è incognita $\Rightarrow t_{n-1}$ solo per piccoli campioni $n \leq 30$
- $\Rightarrow N(0,1)$ per $n \geq 30$ sostituendo $\sigma$ con $s$

STIMA PER $\sigma^2$

- se $\mu$ è nota $\Rightarrow \chi^2_n$
- se $\mu$ è incognita $\Rightarrow \chi^2_{n-1}$

e la numerosità del campione non conta

Esempi

1 Stimare il numero medio di battiti cardiaci al minuto di una popolazione normale $N(\mu, \sigma = 10)$ considerando un campione casuale, di dimensione $n = 49$, avente $\overline{x}_{49} = 90$.
Determinare gli intervalli di confidenza bilaterali per $\mu$ al 90%, 95%, 99%.

- $(1-\alpha) = 0.90 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05$, $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.05} = 1.645$

$90 - 1.645 \cdot \frac{10}{7} < \mu < 90 + 1.645 \cdot \frac{10}{7}$
$\downarrow$
$\mu \in (87.65; 92.35)$
$\ell_I = 4.70$

- $(1-\alpha) = 0.95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$, $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$
$\ell_I = 5.60$

- $(1-\alpha) = 0.99 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005$, $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.005} = 2.58$
$\ell_I = 7.36$

Se $(1-\alpha)$ aumenta, $\ell_I$ aumenta.

② Da una popolazione si estrae un campione di 16 oggetti di cui si misura il peso. Stimare il peso medio $\mu$ della popolazione, sapendo che $\overline{x}_{16} = 3.42$ grammi e $s = 0.68$ grammi, con un livello di confidenza del 99%.
Poichè eseguo delle misure, anche se il testo non lo specifica la distribuzione della popolazione è una normale $N(\mu, \sigma^2)$. Bisogna stimare $\mu$ con $\sigma^2$ incognita.

$n = 16$ campione piccolo ($< 30$)
$\nu = n - 1 = 15$ gradi di libertà della $t$ di Student
$1 - \alpha = 0.99$, $\frac{\alpha}{2} = 0.005$

$$t_{\frac{\alpha}{2},n-1} = t_{0.005,15} = 2.947$$

$$3.42 - 2.947 \cdot \frac{0.68}{4} < \mu < 3.42 + 2.947 \cdot \frac{0.68}{4}$$
$$\Rightarrow \mu \in (2.91, 3.93)$$

③ Dato un campione casuale di 16 studenti scelti da una classe quinta di una scuola superiore, se ne misura l'altezza. È nota la varianza campionaria $s^2 = 37.09\text{cm}^2$.
Determinare un intervallo di confidenza bilaterale al 95% per la varianza $\sigma^2$ della popolazione costituita

da tutti gli studenti delle classi quinte.

Poichè faccio delle misure, la densità della popolazione è una normale $N(\mu, \sigma^2)$.
Per costruire un intervallo di confidenza per $\sigma^2$ quando $\mu$ non è nota uso la statistica $V$ e quindi $\chi^2_{n-1}$.

$1 - \alpha = 0.95$, $\alpha = 0.05$, $\frac{\alpha}{2} = 0.025$, $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$

$\nu = n - 1 = 15$ gradi di libertà della $\chi^2$

$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{0.025,15} = 27.488$

$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{0.975,15} = 6.262$

$\frac{15 \cdot 37.09}{27.488} < \sigma^2 < \frac{15 \cdot 37.09}{6.262}$

$\Rightarrow \sigma^2 \in (20.23; 88.84)$

4 Le misure di un campione casuale di 200 sferette da cuscinetto prodotte da un macchinario, in una settimana, forniscono i seguenti dati:
$\overline{x}_{200} = 0.824\text{cm}$
$s = 0.042\text{cm}$

Determinare un intervallo di confidenza bilaterale per la media $\mu$ della popolazione di sferette al 95%.

La funzione di densità della popolazione è una normale $N(\mu, \sigma^2)$.
La $\sigma^2$ non è nota $\rightarrow$ dovrei applicare la statistica $T$, ma la tabella della $t$ di Student arriva fino al grado di libertà $\nu = 50$ e nel nostro caso $\nu = n-1 = 199$!!.
Poichè i grafici della $t$ e della $Z$ sono simili, si può usare la $N(0,1)$ sostituendo a $\sigma$ incognita il valore campionario $s = 0.042$.

$1 - \alpha = 0.95$, $\alpha = 0.05$, $\frac{\alpha}{2} = 0.025$, $z_{0.025} = 1.96$

$$0.824 - 1.96 \cdot \frac{0.042}{\sqrt{200}} < \mu < 0.824 + 1.96 \cdot \frac{0.042}{\sqrt{200}}$$

$\Rightarrow \mu \in (0.818; 0.83)$