2 Calcolo delle probabilità

Il concetto di probabilità nasce nel Rinascimento con lo studio dei codici segreti e si sviluppa in modo sistematico nel 17° secolo con i giochi d'azzardo.
Il calcolo delle probabilità è lo studio delle proprietà quantitative (come la frequenza) che possono essere osservate per quegli eventi il cui verificarsi o meno (in seguito ad osservazioni o prove) non è prevedibile in modo deterministico.
Tali eventi vengono detti casuali o aleatori.
Matematicamente la probabilità viene descritta mediante una quantità scalare che caratterizza la frequenza di ricorrenza di un dato evento al ripetersi delle prove.

TEORIA CLASSICA O "A PRIORI"

Se l'esito delle prove può essere descritto da un numero finito n di casi possibili, allora la probabilità p di uno di tali casi viene definita "a priori" come:

$$p = \frac{f}{n} \in [0, 1]$$

dove f rappresenta il numero dei casi favorevoli. Questa è essenzialmente la definizione di Laplace: "La probabilità di un evento è il rapporto tra il numero di casi favorevoli ed il numero di casi possibili, quando questi sono tutti equiprobabili".

Esempi

- Lancio ripetuto di un dado (non truccato).
  In questo esempio abbiamo $n = 6$ casi ugualmente possibili e mutuamente esclusivi.

  – probabilità che esca un numero pari:

  $$f = 3, \quad (2, 4, 6) \qquad p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

  – probabilità che esca il numero 5:

  $$f = 1, \qquad p = \frac{1}{6}$$

- Lancio di due dadi (non truccati).
  Questo esempio presenta $n = 6^2 = 36$ casi possibili, che possono essere rappresentati dagli elementi di una matrice 6×6:

$$\begin{pmatrix} (1,1) & \dots & (1,6) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (6,1) & \dots & (6,6) \end{pmatrix}$$

– probabilità che esca un doppio 6:

$$f = 1, \qquad p = \frac{1}{36}$$

– probabilità di ottenere 5 dalla somma dei punteggi dei due dadi:

$$f = 4, \quad (1,4),(2,3),(3,2),(4,1) \quad p = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

- Estrazione di una carta da un mazzo di carte francesi.
  Questo esempio presenta $n = 52$ casi ugualmente possibili, mutuamente esclusivi.

  – probabilità che esca una carta di fiori:

$$f = 13, \qquad p = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

  – probabilità che esca un asso:

$$f = 4, \quad p = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

– probabilità che esca un asso o una carta di fiori:

$$f = 4 + 13 - \boxed{1}, \qquad p = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

asso contato due volte

– probabilità che non esca nè un asso, nè una carta di fiori:

$$f = 52 - 16 = 36\,, \qquad p = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}$$

- Lancio di una moneta. Testa (T), Croce (C). Se il lancio viene ripetuto 2 volte ci sono 4 possibili esiti ugualmente possibili e mutuamente esclusivi: $n = 2^2 = 4$

$$\begin{pmatrix} TT & TC \\ CT & CC \end{pmatrix}$$

– probabilità di ottenere due teste:

$$f = 1, \qquad p = \frac{1}{4}$$

– probabilità di ottenere tutte teste o tutte croci in k lanci (casi possibili $= 2^k$):

$$f = 2, \qquad p = \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

DIFETTI DEL METODO "A PRIORI"

- Occorre supporre che gli eventi possibili siano in numero finito.
- Occorre supporre che gli eventi siano mutuamente esclusivi o incompatibili.
- Occorre supporre che gli eventi siano tutti ugualmente probabili (equiprobabili).

Il primo problema si supera introducendo la definizione di probabilità geometrica, che rappresenta un'estensione di quella classica.
Il secondo e il terzo possono essere superati solo cambiando teoria, passando alla teoria empirica o frequentista.

TEORIA EMPIRICA O FREQUENTISTA

È necessario concepire una serie di esperimenti o prove che avvengano tutte in condizioni "abbastanza"

uniformi. In tal caso è possibile postulare l'esistenza di un numero p, detto probabilità dell'evento, e approssimarlo con la frequenza relativa con la quale le prove ripetute soddisfano l'evento.
La probabilità di un evento viene definita come il limite a cui tende la frequenza relativa di successo all'aumentare del numero delle prove:

$$p = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n},$$

dove n è il numero delle prove, n_A è il numero delle volte che si verifica un certo evento A.
Si noti che in questo caso non bisogna specificare nè l'equiprobabilità nè l'incompatibilità degli eventi.

DIFETTI DELLA TEORIA FREQUENTISTA

- Si applica ad esperimenti ripetibili per i quali il limite per $n \to \infty$ abbia senso.

TEORIA GEOMETRICA

La definizione secondo la teoria classica non si applica al gioco del franc-carreau: lancio di una moneta di diametro d che cade su un pavimento a piastrelle quadrate di lato c. Si scommette se la moneta cada all'interno di una piastrella oppure a cavallo di una o più piastrelle.

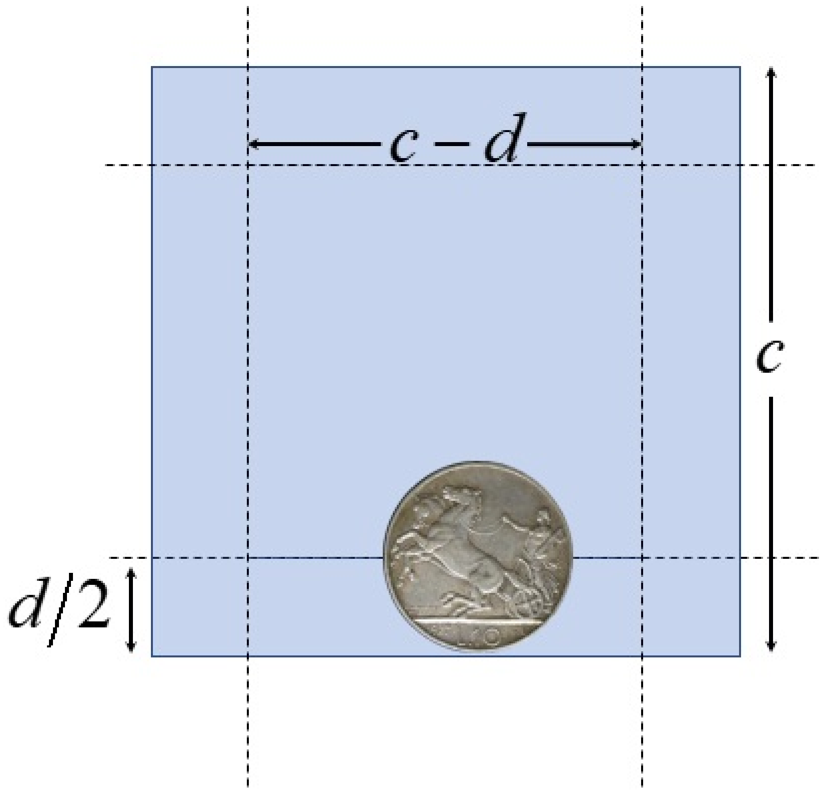

Figura 2: Lato della piastrella = c cm, diametro della moneta = d cm.

- I casi favorevoli sono tutti quelli in cui la moneta ha il centro che cade internamente al quadrato di lato $c-d$: il centro non può uscire dal quadrato di lato $c-d$.

- I casi possibili sono quelli in cui la moneta ha il centro che cade in un qualunque punto della piastrella.

Si noti che sia il numero di casi favorevoli che il numero di casi possibili sono infiniti.
Non è possibile contarli, ma si possono misurare utilizzando l'area occupata dai punti-evento (punti in cui cade il centro). La probabilità di fare franc-carreau è quindi:

$$p = \frac{(c-d)^2}{c^2}$$

La probabilità di non fare franc-carreau è

$$q = 1 - p$$

Se vogliamo che il gioco sia equo dovremmo avere $q = p = \frac{1}{2}$, e cioè

$$\frac{(c-d)^2}{c^2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{c}{d} = 2 + \sqrt{2} \sim 3,4142$$

BUFFON: il lato della piastrella deve essere circa 3 volte e mezza più grande del diametro della moneta affinchè il gioco sia equo.

AGO di BUFFON: si lancia un ago lungo ℓ su un pavimento a parquet, a listelli paralleli posti a distanza $d > \ell$. Calcolare la probabilità che, cadendo, l'ago intersechi una delle scanalature. Non è sufficiente conoscere la distanza del punto medio dell'ago dalla scanalatura, ma bisogna conoscere anche la sua inclinazione θ rispetto alla medesima.

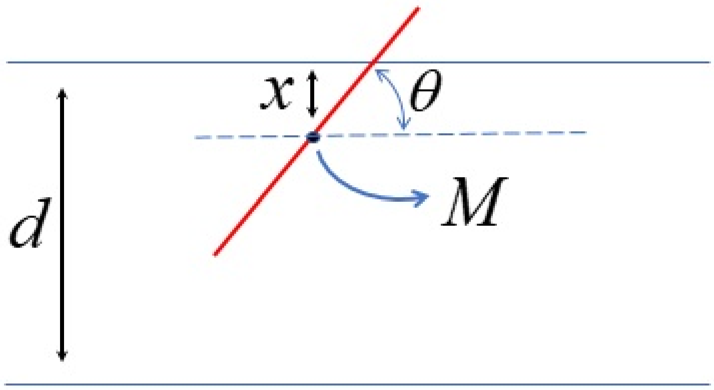

Figura 3: $M : (x, \theta)$ con $0 < x < \frac{d}{2}$ e $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$M \in$ al rettangolo di lati $d/2$, $\pi/2$.

Poichè l'ago deve intersecare la scanalatura, fissato θ, si ha:

$$0 \leq x \leq \frac{\ell}{2} \sin\theta \tag{1}$$

- Casi favorevoli: area della regione che soddisfa (1)
- Casi possibili: area del rettangolo

$$p = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\pi d}{4}} = \frac{2\ell}{\pi d}$$

Se $\ell = d \Longrightarrow p = \frac{2}{\pi}$.
Con il computer è possibile simulare una serie di lanci dell'ago e tale metodo, detto di Montecarlo, può essere usato per dare una misura approssimata di π.

Poichè le regole e i metodi di calcolo nelle diverse teorie che abbiamo esaminato non differiscono tra loro, è possibile seguire l'impostazione dovuta ad A.N. KOLMOGOROV (1933), fondatore della TEORIA ASSIOMATICA della probabilità.
Il linguaggio utilizzato è quello della teoria degli insiemi.

SPAZIO CAMPIONE ED EVENTI

DEFINIZIONE: Lo spazio campione, indicato con Ω, è la totalità di tutti i possibili risultati di un esperimento concettuale.
Se lo spazio campione ha un numero finito di elementi, tali elementi si possono elencare separati da una virgola e racchiudere tra parentesi graffe $\{\ ,\ \}$.
Se lo spazio campione ha un numero infinito di elementi, può essere descritto tramite un'affermazione o una regola. Ad esempio:

$$\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

DEFINIZIONE: Un evento è un sottoinsieme dello spazio campione e si indica con le lettere maiuscole A, B, C,...

DEFINIZIONE: Ω è detto evento certo.

DEFINIZIONE: $\varnothing$ è detto evento impossibile.

DEFINIZIONE: Il complementare di un evento A rispetto ad Ω è il sottoinsieme di tutti gli elementi di Ω che non sono contenuti in A e viene indicato con $\overline{A}$.

Esempi

- Lancio di un dado.
  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  $\mathrm{card}(\Omega) = n = 6$
  Un possibile evento è "esce un numero pari" $\rightarrow$
  $A = \{2, 4, 6\}$
- Lancio di tre monete.
  $\Omega = \{\mathrm{TTT}, \mathrm{TTC}, \mathrm{TCT}, \mathrm{CTT}, \mathrm{TCC}, \mathrm{CTC}, \mathrm{CCT}, \mathrm{CCC}\}$
  "Escono due teste e una croce" è un possibile evento $\rightarrow A = \{\mathrm{TTC}, \mathrm{TCT}, \mathrm{CTT}\}$
- Tempo di vita di una lampadina.
  $\Omega = \{t : t \geq 0\}$, con t ad esempio misurato in ore.
  "La lampadina si brucia prima di 300 ore è un evento" $\rightarrow A = \{t : 0 \leq t < 300\}$

OPERAZIONI CON GLI EVENTI

DEFINIZIONE: Se $A, B \subset \Omega$ sono due eventi dello stesso spazio campione, l'intersezione di A e B, $A \cap B$, è l'evento che contiene tutti gli elementi comuni sia ad A che a B.

DEFINIZIONE: Se $A, B \subset \Omega$ sono due eventi dello stesso spazio campione che non hanno elementi in comune, cioè $A \cap B = \varnothing$, i due eventi A e B si dicono DISGIUNTI o MUTUAMENTE ESCLUSIVI o INCOMPATIBILI.

DEFINIZIONE: Se $A, B \subset \Omega$ sono due eventi dello stesso spazio campione, l'unione di A e B, $A \cup B$, è l'evento che contiene tutti gli elementi che appartengono ad A o a B.

La relazione tra gli eventi e il corrispondente spazio campione può essere illustrata graficamente attraverso i DIAGRAMMI DI VENN, dove Ω è rappresentato da un rettangolo e gli eventi da curve chiuse in Ω.

SI VEDA L'APPENDICE A - TEORIA DEGLI INSIEMI (cenni)

In molti casi, per risolvere un problema di calcolo delle probabilità, è sufficiente contare il numero dei punti o di elementi nello spazio campione, senza doverli elencare uno ad uno. Il principio fondamentale dell'enumerazione o conteggio, spesso indicato come regola moltiplicativa, così come la conoscenza dello spazio campione che contiene tutti i possibili ordinamenti di un gruppo di oggetti, detti permutazioni, oppure la conoscenza del numero dei possibili sottoinsiemi o classi in cui è possibile suddividere l'insieme originale, considerando l'ordine non rilevante, chiamate combinazioni, sono argomenti del CALCOLO COMBINATORIO.

SI VEDA L'APPENDICE B - CALCOLO COMBINATORIO (cenni)

PROBABILITÀ DI UN EVENTO

Non siamo interessati agli eventi, ma alla probabilità che uno di questi eventi si verifichi o meno.
L'impostazione assiomatica parte dal concetto di $\sigma - algebra$ o classe additiva.
La probabilità viene vista come una misura, cioè come una funzione che associa ad ogni sottoinsieme di Ω un numero reale non negativo, tale che la somma delle probabilità di tutti gli eventi sia uguale ad 1.
Se la cardinalità di Ω è finita, diciamo card$(\Omega) = n$, l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi, detto insieme delle parti, ha cardinalità 2^n.
Se Ω ha la cardinalità del continuo, il suo insieme delle parti è "troppo grande" perchè su di esso si

possa definire una misura.
Si considerano perciò i soli sottoinsiemi di Ω che costituiscono un insieme non vuoto $\mathcal{A}$ (classe additiva) tale che:

- $A \in \mathcal{A} \rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$
- $\forall i \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{A} \rightarrow \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$

Una classe additiva è quindi un sottoinsieme dell'insieme delle parti di Ω che risulta chiuso rispetto alle operazioni di complemento e di unione numerabile.
Inoltre, per le leggi di De Morgan (vedi Appendice A)

- $\forall i \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{A} \rightarrow \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i = \overline{\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} \overline{A}_i} \in \mathcal{A}$

ASSIOMI DELLA PROBABILITÀ

DEFINIZIONE: Dati uno spazio campione Ω e una classe additiva (σ-algebra) $\mathcal{A}$ di eventi su Ω, una funzione

$$P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$$

è detta FUNZIONE DI PROBABILITÀ se valgono i seguenti assiomi:

1. $\forall A \in \mathcal{A} \quad P[A] \geq 0$
2. $P[\Omega] = 1$
3. Per ogni successione $A_1, ..., A_n, ... \in \mathcal{A}$ di eventi a due a due disgiunti (che quindi verificano $A_i \cap A_j = \varnothing \ \forall i, j \ \ i \neq j$) e tali che $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ si ha:

$$P[\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i] = \sum_{i \in \mathbb{N}} P[A_i]$$

La funzione P è una funzione d'insieme perchè gli elementi della funzione sono insiemi di punti anzichè punti singoli. La terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ è detta SPAZIO DI PROBABILITÀ.
Come conseguenza degli assiomi è possibile verificare le seguenti

PROPRIETÀ di $P[\cdot]$

1. $P[\varnothing] = 0$
2. se $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$, a due a due disgiunti, allora $P[\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i] = \sum\limits_{i=1}^{n} P[A_i]$

3. $\forall A \in \mathcal{A} \quad P[\overline{A}] = 1 - P[A]$
   (conseguenza di $\Omega = A \cup \overline{A}, \ A \cap \overline{A} = \varnothing$)

4. Se $A, B \in \mathcal{A}$

$$P[A] = P[A \cap B] + P[A \cap \overline{B}]$$

$$P[A - B] = P[A \cap \overline{B}] = P[A] - P[A \cap B]$$

   (conseguenza di $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \varnothing$)

5. Se $A, B \in \mathcal{A}$ e $A \subseteq B$,

$$P[A] \leq P[B]$$

6. Se $A, B \in \mathcal{A}$

$$\underline{P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]}$$

   REGOLA DI ADDIZIONE

7. $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$

$$P[\bigcup_{i=1}^{n} A_i] \leq \sum_{i=1}^{n} P[A_i]$$

OSSERVAZIONE

Questa definizione assiomatica di probabilità ci dice quali funzioni di insieme sono accettabili come funzioni di probabilità, ma non ci dice quali valori la funzione $P[\cdot]$ attribuisce ad un dato evento.

DEFINIZIONE: Sia $\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ uno spazio campione. Un qualsiasi sottoinsieme $A_i = \{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ è chiamato evento semplice o elementare.

SPAZI CAMPIONARI FINITI

Se Ω è costituito da un numero finito di elementi distinti, cioè $\Omega = \{e_1, ..., e_n\}$ è un insieme finito, allora:

$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \{e_i\}$, $\{e_i\} \cap \{e_j\} = \varnothing \quad \forall i \neq j$, e si ha:

- $\forall A \in \mathcal{A} \quad P[A] = \sum_{e_i \in A} P[\{e_i\}]$
- $P[\{e_i\}] \doteq p_i$, $i = 1, ..., n$: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Se i punti dello spazio campionario sono anche equiprobabili allora:

- $P[\{e_i\}] = p_i = \dfrac{1}{n}, \quad i = 1, ..., n$

- $\forall A \in \mathcal{A} \quad P[A] = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{\text{card}(A)}{n}$

e la funzione di probabilità P è detta uniforme.

Esempi

- Lancio di due dadi (non truccati).
  $\Omega = \{(i,j) : i = 1, ..., 6; j = 1, ..., 6\}$,
  $\text{card}(\Omega) = 6^2 = 36$,
  $\{e_k\} = (i,j) =$ evento elementare.
  $P[\{e_k\}] = 1/36$.
  Scegliamo l'evento "esce 7 come punteggio":
  $A_7 = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$
  $\text{card}(A_7) = 6$.
  $P[A_7] = \dfrac{\text{card}(A_7)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 21 & \cdot & & & 25 & \cdot \\ 31 & \cdot & & 34 & & \cdot \\ 41 & & 43 & & & \cdot \\ 51 & 52 & & & & \cdot \\ 61 & & & & & \cdot \end{pmatrix}$$

- Lancio di un dado truccato.
  Supponiamo che la probabilità che esca la faccia j, $j = 1, ..., 6$ sia direttamente proporzionale al numero j della faccia. Qual è la probabilità di ottenere una faccia con il numero pari?
  Sia $P[j] = \alpha j$ dove α è il coefficiente di proporzionalità. Bisogna determinare il valore di α.

  $$\sum_{j=1}^{6} P[j] = \sum_{j=1}^{6} \alpha j = \alpha \frac{6 \cdot 7}{2} = 21\alpha,$$

  (ricorda che $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$)

  e poichè $\sum_{j=1}^{6} P[j] = 1$, $\alpha = 1/21$.

  $$P[A_2] + P[A_4] + P[A_6] = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{4}{7}$$

  La probabilità di ottenere una faccia con un numero dispari è $3/7$.

Possiamo dire che nel caso di spazi campionari finiti, il calcolo della probabilità di un evento si riduce ad un problema di conteggio del numero degli elementi dell'evento.

Tuttavia, se la cardinalità di Ω è molto grande, anche se finita, sarà necessario utilizzare gli strumenti del calcolo combinatorio.

Esempio

Un giocatore di poker ha in mano 5 carte. Calcolare la probabilità che abbia 2 assi e 3 jack.

- il numero di modi in cui posso ottenere 2 assi da 4 carte è:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

- il numero di modi in cui posso ottenere 3 jack da 4 carte è:

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

Allora, per la regola di enumerazione, ci sono $n = 6 \cdot 4 = 24$ mani di carte con 2 assi e 3 jack.

- nel poker, il numero totale di mani da 5 carte, tutte ugualmente probabili, è:

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!} = 2.598.960$$

quindi

$$p = \frac{24}{2.598.960} = \frac{1}{108.290} \sim 0.9 \cdot 10^{-5}$$

Esercizi

1. I pezzi prodotti da una certa macchina possono avere 2 tipi di difetti, D_1 e D_2. Si sa che:

   $P[D_1] = 0.1$ presenza del primo difetto
   $P[\overline{D}_2] = 0.8$ assenza del secondo difetto
   $P[D_1 \cap D_2] = 0.01$ presenza di entrambi i difetti

   Calcolare la probabilità che il pezzo scelto non abbia alcun difetto.

   Il problema ci chiede di calcolare $P[\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2]$. Per la legge di De Morgan abbiamo

   $$P[\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2] = P[\overline{D_1 \cup D_2}] = 1 - P[D_1 \cup D_2],$$

   ma per la regola di addizione si ha

   $$\begin{aligned} P[D_1 \cup D_2] &= P[D_1] + P[D_2] - P[D_1 \cap D_2] \\ &= 0.1 + 0.2 - 0.01 = 0.29, \end{aligned}$$

   quindi

   $$P[\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2] = 1 - 0.29 = 0.71.$$

2. Lancio di un dado per 3 volte.
   Calcolare la probabilità di ottenere almeno ($\neq$ esattamente!) 2 numeri uguali.

   $\Omega = \{1, ..., 6\}$ per il primo lancio
   casi possibili $= 6^3 = 216$
   casi favorevoli $=?$

   1) $iij \quad i = 1, ..., 6 \quad j = 1, ..., 6 \quad 6 \cdot 6 = 36$
   2) $iji \quad i = 1, ..., 6 \quad j = 1, ..., 6 \quad 6 \cdot 6 = 36$
   3) $jii \quad i = 1, ..., 6 \quad j = 1, ..., 6 \quad 6 \cdot 6 = 36$

   Ma i 6 casi con $j = i$ vengono contati in 2) e 3) oltre che in 1), quindi in totale abbiamo $108 - 12 = 96$ casi favorevoli.

   $\Rightarrow p = \frac{96}{216} = \frac{4}{9}$

3. Calcolare la probabilità dell'unione di tre eventi A, B, C, cioè $P[A \cup B \cup C]$.

$$P[A \cup B \cup C] = P[(A \cup B) \cup C] =$$
$$= P[(A \cup B)] + P[C] - P[(A \cup B) \cap C]$$

ma

$$P[(A \cup B) \cap C] = P[(A \cap C) \cup (B \cap C)] =$$
$$= P[A \cap C] + P[B \cap C] - P[A \cap B \cap C]$$

Perciò

$$P[A \cup B \cup C] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] +$$
$$+ P[C] - P[A \cap C] - P[B \cap C] + P[A \cap B \cap C]$$
$$= P[A] + P[B] + P[C] - P[A \cap B] +$$
$$- P[A \cap C] - P[B \cap C] + P[A \cap B \cap C]$$

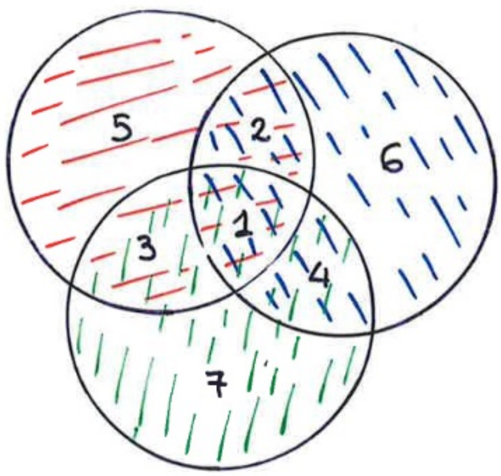

Figura 4

I PROBLEMI DEL CAVALIER DE MÉRÉ

(giocatore d'azzardo), sottoposti a B. Pascal (1623-1662)

1. Trovare il più piccolo numero intero n tale che lanciando n volte 1 dado, la probabilità di avere almeno un 6 sia maggiore di 1/2.

2. Trovare il più piccolo numero intero m tale che lanciando m volte 2 dadi, la probabilità di avere almeno un $(6, 6)$ sia maggiore di $1/2$.

1. In un singolo lancio, chiamiamo "A" l'evento "fare 6" e "B" l'evento "fare almeno un 6 in n lanci". Abbiamo:

$$P[A] = \frac{1}{6}, \quad P[\overline{A}] = \frac{5}{6}.$$

La strategia è quella di calcolare la probabilità dell'evento $\overline{B}$ = "nessun 6 in n lanci", in modo poi da poter calcolare $P[B] = 1 - P[\overline{B}]$.

$$P[\overline{B}] = \underbrace{\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{5}{6}}_{\text{n volte}} = \left(\frac{5}{6}\right)^n \Rightarrow P[B] = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Il problema si è ridotto allora a trovare il più piccolo numero intero n tale che $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > \frac{1}{2}$.

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{1}{2}$$

$$n = 1 \quad \left(\frac{5}{6}\right)^1 = 0.8\overline{3}$$

$$n = 2 \quad \left(\frac{5}{6}\right)^2 \sim 0.694$$

$$n = 3 \quad \left(\frac{5}{6}\right)^3 \sim 0.578$$

$$n = 4 \quad \left(\frac{5}{6}\right)^4 \sim 0.482 \;\Rightarrow P[B]|_{n=4} \sim 0.518$$

2. In un lancio di due dadi, chiamiamo "A" l'evento "fare (6,6)" e "B" l'evento "fare almeno un (6,6) in m lanci". Quindi $\overline{B}$ è l'evento "ottenere nessun (6,6) in m lanci ". Si ha:

$$P[\overline{B}] = \left(\frac{35}{36}\right)^m \Rightarrow P[B] = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^m$$

Bisogna trovare il più piccolo intero m tale che $\left(\frac{35}{36}\right)^m < \frac{1}{2}$.

$$\vdots$$

$$m = 24 \quad \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \sim 0.5085$$

$$m = 25 \quad \left(\frac{35}{36}\right)^{25} \sim 0.4945$$

$$\Rightarrow P[B]|_{m=25} \sim 0.5055$$