3 Probabilità condizionata

Il concetto di probabilità condizionata è molto importante poichè, in molte applicazioni, alla struttura probabilistica vengono imposte determinate restrizioni.
Il concetto di probabilità condizionata permette di rivalutare l'idea di probabilità di un evento alla luce di nuove informazioni, cioè quando un altro evento si è verificato.
Perciò indichiamo col simbolo $P[A|B]$ la probabilità che A si verifichi sapendo che B si è verificato, leggendo semplicemente "probabilità di A dato B".
DEFINIZIONE: Dati due eventi $A, B \in \mathcal{A}$, definiamo PROBABILITÀ CONDIZIONATA DI A DATO B, cioè $P[A|B]$, la quantità scalare:

$$P[A|B] = \begin{cases} \frac{P[A \cap B]}{P[B]} & \text{se } P[B] > 0\,, \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

<u>Nota bene</u>: la probabilità condizionata $P[\,\cdot\,|B]$ con $P[B] > 0$ è una funzione di probabilità poichè verifica i 3 assiomi e pertanto per essa valgono le proprietà della probabilità già enunciate.

Esempi

- Lancio di 2 monete

  Calcolare la probabilità di:

  1. Avere 2 teste, data una testa sulla 1ª moneta.
  2. Avere 2 teste, data almeno una testa.

  $$\Omega = \{TT, TC, CT, CC\}, \quad \mathrm{card}(\Omega) = 4$$

  Secondo la definizione classica:

  1. testa sulla 1ª moneta $\rightarrow \{TT, TC\}$ per cui $P[TT] = \frac{1}{2}$,
  2. almeno una testa $\rightarrow \{TT, TC, CT\}$ per cui $P[TT] = \frac{1}{3}$.

  Vogliamo ora utilizzare la nozione di probabilità condizionata. Chiamiamo "A_1" l'evento "avere T sulla 1ª moneta" ed "A_2" l'evento "avere T sulla 2ª moneta". L'evento $A_1 \cup A_2$ è "avere almeno una testa", l'evento $A_1 \cap A_2$ è "avere due teste".

1.
$$P[A_1 \cap A_2 | A_1] = \frac{P[(A_1 \cap A_2) \cap A_1]}{P[A_1]} =$$
$$= \frac{P[A_1 \cap A_2]}{P[A_1]} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$$

2.
$$P[A_1 \cap A_2 | A_1 \cup A_2] =$$
$$= \frac{P[(A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cup A_2)]}{P[A_1 \cup A_2]} =$$
$$= \frac{P[A_1 \cap A_2]}{P[A_1 \cup A_2]} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

- Lancio di due dadi

  Calcolare la probabilità di ottenere 9, ammesso che su un dado esca 3.
  Chiamiamo:
  "A"= "ottenere 9" $= \{(3,6);(6,3);(4,5);(5,4)\}$
  "B"= "su un dado esce 3" $= \{(1,3);(3,1);(2,3);$
  $(3,2);(3,3);(3,4);(4,3);(3,5);(5,3);(3,6);(6,3)\}$

$$\mathrm{card}(\Omega) = 36, \ \mathrm{card}(A) = 4, \ \mathrm{card}(B) = 11;$$
$$A \cap B = \{(3,6);(6,3)\} \Rightarrow \mathrm{card}(A \cap B) = 2,$$

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{\frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(\Omega)}}{\frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)}} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{2}{11}$$

OSSERVAZIONE

Non confondere la nozione di probabilità condizionata con le prove ripetute dello stesso esperimento. Ad esempio, se lanciamo due volte un dado supponiamo che esca il numero 3 al primo lancio. Qual è la probabilità di "ottenere 9" con il secondo lancio? (cioè esce 6 al secondo lancio). La probabilità è $\frac{1}{6}$.

OSSERVAZIONE

Se lo spazio campione Ω è finito e la probabilità è uniforme (punti equiprobabili), allora:

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)}, \quad (B \neq \varnothing)$$

OSSERVAZIONE

Dato lo spazio campione Ω e dati due eventi A e $B \in \mathcal{A}$, poichè

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \quad \text{e} \quad (A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \varnothing$$

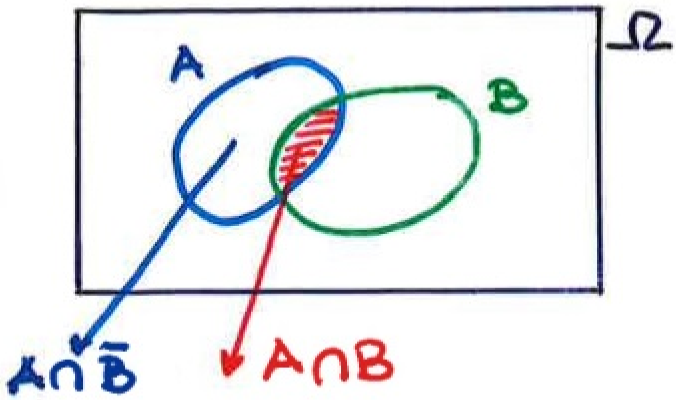

Figura 5

allora

$$P[A] = P[A \cap B] + P[A \cap \overline{B}]$$

ed anche

$$P[A] = P[A|B]P[B] + P[A|\overline{B}](1 - P[B])$$

- Lancio di un dado truccato
  Il dado è stato modificato in modo che i numeri pari abbiano una probabilità doppia di uscire rispetto ai numeri dispari.
  Sia A l'evento di ottenere un quadrato perfetto nel lancio di un dado.
  $A = \{1, 4\}$
  Se indico con p la probabilità di ottenere un numero dispari, allora:
  $P[\text{dispari}] = P[1] + P[3] + P[5] = 3p$

La probabilità di ottenere un numero pari è doppia
$P[\text{pari}] = P[2] + P[4] + P[6] = 3 \cdot 2p = 6p.$
Poichè $\Omega = D \cup P$ e $P[\Omega] = 1 \rightarrow$
$\rightarrow 3p + 6p = 1 \rightarrow p = \frac{1}{9}.$
Quindi ogni numero dispari ha probabilità $\frac{1}{9}$ ed ogni numero pari $\frac{2}{9}$.

$$P[A] = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Ora supponiamo che nel lancio del dado sia uscito un numero maggiore di 3. Quanto vale ora la probabilità dell'evento A?
Ora $A = \{4\}, B = \{4;5;6\}, \quad \{A \cap B\} = \{4\}.$

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{P[A]}{P[B]} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{2+1+2}{9}} = \frac{2}{5}$$

- Volo aeroplano
  La probabilità che un volo parta in orario è $P[A] = 0.83$.
  La probabilità che un volo arrivi in orario è $P[B] = 0.82$.
  La probabilità che un volo parta ed arrivi in ora-

rio è $P[A \cap B] = 0.78$.
Calcolare la probabilità che:

1. l'aereo arrivi in orario, sapendo che è partito in orario.
2. l'aereo sia partito in orario, sapendo che è arrivato in orario.
3. l'aereo arrivi in orario, sapendo che NON è partito in orario.

1. $P[B|A] = \frac{P[B \cap A]}{P[A]} = \frac{P[A \cap B]}{P[A]} = 0.94$
2. $P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = 0.95$
3. $P[B|\overline{A}] = \frac{P[B \cap \overline{A}]}{P[\overline{A}]}$

   $P[\overline{A}] = 1 - P[A] = 1 - 0.83 = 0.17$.
   Poichè $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$ con $(B \cap A) \cap (B \cap \overline{A}) = \varnothing$
   $P[B] = P[B \cap A] + P[B \cap \overline{A}]$
   perciò
   $P[B \cap \overline{A}] = P[B] - P[B \cap A] = 0.82 - 0.78 = 0.04$
   quindi $P[B \cap \overline{A}] = \frac{0.04}{0.17} = 0.24$.

IL TEOREMA DELLE PROBABILITÀ TOTALI

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità e $B_1, ..., B_n$ una collezione finita di eventi di $\mathcal{A}$, a due a due incompatibili, tali che:

- $P[B_i] > 0\,, \quad i = 1, ..., n$
- $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$

Allora $\forall A \in \mathcal{A}$ si ha:

$$P[A] = \sum_{i=1}^{n} P[A|B_i]P[B_i]$$

Dimostrazione

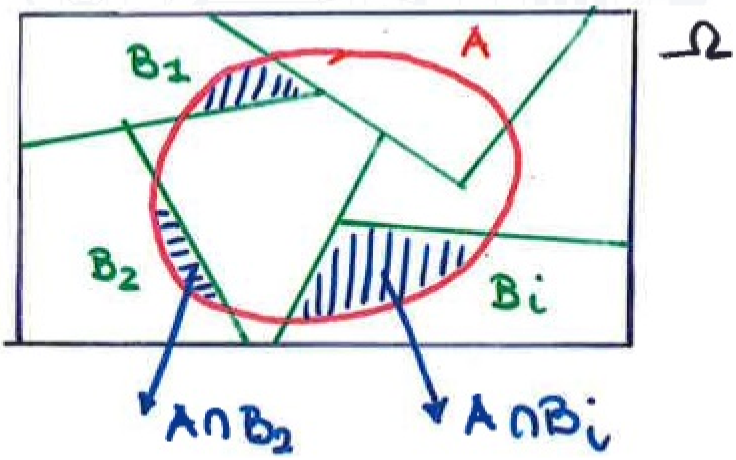

Figura 6

$A \cap B_1 \subset B_1$
$A \cap B_2 \subset B_2$

$\vdots$
$A \cap B_i \subset B_i$

Poichè $B_1, ..., B_n$ sono disgiunti a due a due, anche $(A \cap B_1), ..., (A \cap B_n)$ sono disgiunti a due a due.
Notiamo che:
$A = \Omega \cap A = (\bigcup_{i=1}^{n} B_i) \cap A = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$
Applicando la funzione di probabilità :

$$P[A] = P[\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)] \underset{\substack{\downarrow \\ \text{incompatibilità}}}{=} \sum_{i=1}^{n} P[A \cap B_i] \underset{\substack{\downarrow \\ \text{dalla def. di p. condizionata}}}{=} \sum_{i=1}^{n} P[A|B_i] P[B_i]$$

PRIMA FORMULA DI BAYES

Una forma equivalente della definizione di probabilità condizionata è la seguente espressione chiamata REGOLA DI MOLTIPLICAZIONE:

$$P[A \cap B] = P[A|B] \cdot P[B], \quad P[B] > 0$$

Poichè $P[A \cap B] = P[B \cap A]$, vale anche

$$P[B \cap A] = P[B|A] \cdot P[A], \quad P[A] > 0$$

ed uguagliando le due espressioni si ottiene:

$$P[A|B] = \frac{P[B|A] \cdot P[A]}{P[B]}$$

Esempi

1. Un sacchetto contiene 4 palline bianche e 3 palline nere. Un altro sacchetto contiene 3 palline bianche e 5 palline nere. Dal primo sacchetto si estrae una pallina e la si inserisce, senza guardarla, nel secondo sacchetto.
   Qual è la probabilità che una pallina estratta dal secondo sacchetto sia nera?

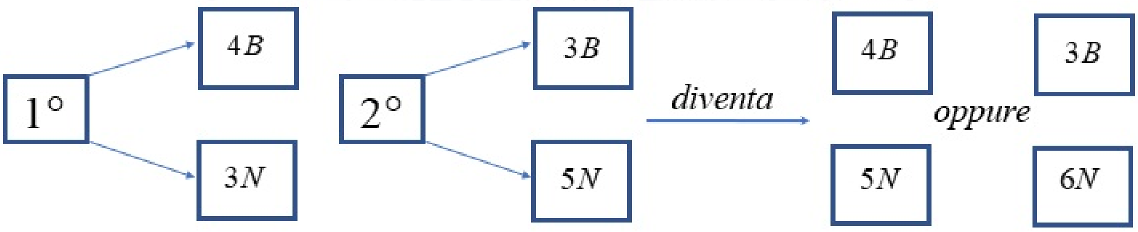

Figura 7

Siano N_i/B_i gli eventi "si estrae una pallina nera/bianca dall'i-esimo sacchetto". Utilizzando il Teorema delle probabilità totali, abbiamo:

$$P[N_2] = P[N_2|N_1]P[N_1] + P[N_2|B_1]P[B_1],$$

e quindi

$$P[N_2] = \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{7} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{7} = \frac{18+20}{63} = \frac{38}{63}.$$

2. In un impianto, 3 macchine B_1, B_2 e B_3 assemblano una quantità di prodotti pari rispettivamente al 30%, 45% e 25% del totale.
È noto che le macchine producono pezzi difettosi rispettivamente nella percentuale del 2%, 3% e 2%.
Scelto a caso un pezzo, calcolare la probabilità che esso sia difettoso.

Sia "A" l'evento "il pezzo è difettoso" e sia B_i, $i = \{1; 2; 3\}$, l'evento "il pezzo è prodotto dalla macchina B_i". I dati del problema ci dicono che:

$$P[B_1] = 0.3, \;\; P[B_2] = 0.45, \;\; P[B_3] = 0.25;$$

$$P[A|B_1] = 0.02, \;\; P[A|B_2] = 0.03, \;\; P[A|B_3] = 0.02.$$

Quindi, per il Teorema delle probabilità totali:

$$P[A] = \sum_{i=1}^{3} P[A|B_i]P[B_i] = 0.0245$$

Nota bene: sottintesa c'è l'ipotesi di indipendenza nella produzione dei pezzi difettosi, per ogni macchina.

3. Un segnale può essere trasmesso da due canali, A e B, con la stessa probabilità .
Il canale A trasmette sempre correttamente.
Il canale B trasmette correttamente con probabilità $\frac{3}{4}$. Si chiede:

   - Qual è la probabilità di ricevere un segnale corretto?
   - Avendo ricevuto un segnale corretto, qual è la probabilità che esso provenga dal canale B?

Chiamiamo "A"/ "B" l'evento "il segnale proviene dal canale A/B "
Chiamiamo C l'evento "il segnale è corretto".

- Per il Teorema delle probabilità totali:

$$P[C] = P[C|A]P[A] + P[C|B]P[B] =$$
$$= 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

- Dalla 1^a formula di Bayes:

$$P[B|C] = \frac{P[C|B]P[B]}{P[C]} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{8}} = \frac{3}{7}.$$

Nota bene: c'è equiprobabilità nella scelta del canale, cioè $P[A] = P[B] = \frac{1}{2}$.

Data una serie di eventi che ricoprono tutto lo spazio campione (ricoprimento finito) e dato un evento A, ci si può chiedere quale sia la probabilità condizionata di ognuno di questi eventi del ricoprimento, sapendo che si è verificato l'evento A. Non è altro che una generalizzazione della 1^a formula di Bayes.

IL TEOREMA DI BAYES

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità e $B_1, ..., B_n$ una collezione finita di eventi di $\mathcal{A}$, a due a due incompatibili, tali che:

- $P[B_i] > 0\,, \quad i = 1, ..., n$
- $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$

Allora $\forall A \in \mathcal{A}$ con $P[A] > 0$ si ha:

$$P[B_i|A] = \frac{P[A|B_i]P[B_i]}{\sum_{k=1}^{n} P[A|B_k]P[B_k]}$$

Dimostrazione

È immediata. Dalla 1ª formula di Bayes si ha:

$$P[B_i|A] = \frac{P[A|B_i]P[B_i]}{P[A]}$$

e per il teorema delle probabilità totali

$$P[A] = \sum_{k=1}^{n} P[A|B_k]P[B_k].$$

Esempio

Sono date 5 urne numerate contenenti ciascuna 10 palline. Dentro la i-esima urna ci sono i palline difettose. Scelta un'urna a caso ed estratta una pallina,

- calcolare la probabilità che la pallina sia difettosa.

- estratta la pallina e visto che è difettosa, calcolare la probabilità che essa provenga dall'urna numero 5.

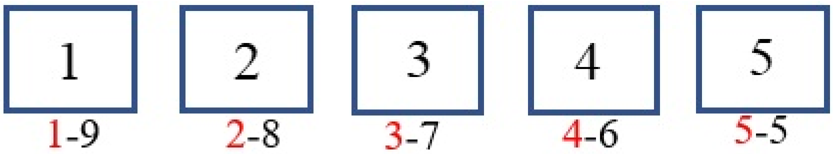

Figura 8

Con la definizione di probabilità a priori $p = \frac{f}{n}$ si ha immediatamente $p = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$.
Vogliamo applicare il teorema delle probabilità totali. Chiamiamo:
"A" l'evento "la pallina è difettosa".
"B_i" l'evento "la pallina viene scelta dalla i-esima urna".
Ogni urna ha la stessa probabilità di essere scelta, quindi

$$P[B_i] = \frac{1}{5}, \; i = 1, ..., 5 \qquad P[A|B_i] = \frac{i}{10}$$

$$P[A] = \sum_{i=1}^{5} P[A|B_i]P[B_i] = \frac{1}{5} \cdot \sum_{i=1}^{5} \frac{i}{10} = \frac{3}{10}$$

Per trovare $P[B_5|A]$ applichiamo il Teorema di Bayes:

$$P[B_5|A] = \frac{P[A|B_5]P[B_5]}{P[A]} = \frac{\frac{5}{10} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{3}$$

In generale avremo

$$P[B_k|A] = \frac{P[A|B_k]P[B_k]}{P[A]} = \frac{\frac{k}{10} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{k}{15}\,, k = 1, .., 5$$

Quindi in termini non condizionati tutti i B_i sono equiprobabili ($P[B_i] = \frac{1}{5}$, $i = 1, ..., 5$), condizionati al verificarsi dell'evento A non lo sono più poichè $P[B_i|A] = \frac{i}{15}$.

OSSERVAZIONE

Il Teorema delle probabilità totali ed il Teorema di Bayes sono tra le regole più importanti della teoria della probabilità . Si applicano in quegli esperimenti cosiddetti a più fasi.

OSSERVAZIONE

È possibile estendere la regola di moltiplicazione enunciata per due eventi a situazioni in cui sono presenti più di due eventi.

REGOLA DEL PRODOTTO

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità e $B_1, ..., B_n$ una collezione finita di eventi di $\mathcal{A}$ tali che:

$$P[B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{n-1}] > 0.$$

Allora vale:

$$P[B_1 \cap \ldots \cap B_n] = P[B_1]P[B_2|B_1]P[B_3|B_1 \cap B_2] \cdots$$
$$\cdots P[B_n|B_1 \cap \ldots \cap B_{n-1}]$$

(senza dimostrazione)

Esempio

Un'urna contiene 10 palline, di cui 3 nere e 7 bianche. Estratta una pallina e registratone il colore, la si rimette nell'urna aggiungendone altre due dello stesso colore.
Calcolare la probabilità di estrarre una pallina nera in ognuno dei primi tre tentativi.

Chiamiamo B_i l'evento "viene estratta una pallina nera all'i-esimo tentativo".
Per la regola del prodotto

$P[B_1 \cap B_2 \cap B_3] = P[B_1]P[B_2|B_1]P[B_3|B_1 \cap B_2]$
$P[B_1] = \frac{3}{10}$, se aggiungo 2 palline nere $P[B_2|B_1] = \frac{5}{12}$, aggiungo altre due palline nere, $P[B_3|B_1 \cap B_2] = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$.
Quindi

$$P[B_1 \cap B_2 \cap B_3] = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

Esercizi proposti

1. In una scatola ci sono 5 transistor rotti, 10 difettosi cioè inizialmente funzionano, ma poi si rompono, 25 non difettosi e non rotti (cioè buoni).
   Scelto a caso un transistor, calcolare la probabilità che esso sia buono, se inizialmente funziona.

   Risposta $\frac{5}{7}$

2. Riprendendo l'esempio numero 2 dopo il teorema delle probabilità totali, dato che il prodotto scelto è difettoso, calcolare la probabilità che sia stato assemblato dalla macchina B_3.

Risposta $\frac{10}{49}$

Nota bene: dato il valore basso ottenuto, si può ritenere che probabilmente il pezzo non sia stato assemblato dalla macchina B_3.

3. In una prova a 5 risposte, lo studente conosce la risposta con probabilità $\frac{1}{3}$, indovina la risposta con probabilità $\frac{2}{3}$. Se prova ad indovinare, risponde correttamente con probabilità $\frac{1}{5}$.
   Qual è la probabilità condizionata che sapesse la risposta ad una domanda a cui ha risposto correttamente?

   Risposta $\frac{5}{7}$

4. Un mazzo di carte francesi (52 carte) è suddiviso casualmente in 4 mazzi da 13 carte ciascuno. Calcolare la probabilità che ci sia un asso in ogni mazzetto.

   Risposta 0.105

INDIPENDENZA

Sebbene la probabilità condizionata permetta di modificare la probabilità di un evento alla luce di nuove informazioni, è molto importante anche il concetto di indipendenza tra eventi.
Dati due eventi A, B se il verificarsi di B non ha alcun impatto sulla probabilità di A, allora A e B sono indipendenti.
DEFINIZIONE: Due eventi A e B si dicono INDIPENDENTI se

$$P[A \cap B] = P[A]P[B]$$

TEOREMA: Le seguenti condizioni sono EQUIVALENTI:

1. $P[A \cap B] = P[A]P[B]$
2. Se $P[B] > 0 \Rightarrow P[A|B] = P[A]$
3. Se $P[A] > 0 \Rightarrow P[B|A] = P[B]$

Dimostrazione
Dire che le 3 proposizioni sono equivalenti significa che 1 implica 2, 2 implica 3 e 3 implica 1.

- 1 →2

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \underset{\substack{\downarrow \\ 1)}}{=} \frac{P[A]P[B]}{P[B]} = P[A]$$

- 2 →3

$$P[B|A] \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Bayes}}}{=} \frac{P[A|B]P[B]}{P[A]} \underset{\substack{\downarrow \\ 2)}}{=} \frac{P[A]P[B]}{P[A]} = P[B]$$

- 3 →1

$$P[A \cap B] \underset{\substack{\downarrow \\ \text{regola moltiplicazione}}}{=} P[B|A]P[A] \underset{\substack{\downarrow \\ 3)}}{=} P[B]P[A]$$

TEOREMA: Se A e B sono indipendenti allora sono indipendenti A e $\overline{B}$, $\overline{A}$ e B, $\overline{A}$ e $\overline{B}$.

Verifichiamo che A e $\overline{B}$ sono indipendenti (gli altri casi si dimostrano in modo analogo).

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \quad \text{e} \quad (A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \varnothing$$

$$P[A] = P[A \cap B] + P[A \cap \overline{B}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P[A \cap \overline{B}] = P[A] - P[A \cap B] \underset{\substack{\downarrow \\ \text{indipendenza}}}{=} P[A] - P[A]P[B] =$$

$$= P[A](1 - P[B]) = P[A]P[\overline{B}]$$

Esempio: Lancio di due dadi
Chiamiamo:
A l'evento "ottenere un numero dispari come punteggio".
B l'evento "ottenere 1 sul primo dado".
C l'evento "ottenere 7 come punteggio".
Stabilire se A e B, A e C, B e C sono indipendenti.

$\Omega = \{(i,j) : i = 1, ..., 6; j = 1, ..., 6\}, \quad \text{card}(\Omega) = 36.$

$A = \{(1,2); (2,1); (1,4); (4,1); (1,6); (6,1); (2,3); (3,2); (2,5); (5,2); (3,4); (4,3); (3,6); (6,3); (4,5); (5,4); (5,6); (6,5)\}$

$\text{card}(A) = 18$

$B = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6)\}$

$\text{card}(B) = 6$

$C = \{(1,6); (6,1); (2,5); (5,2); (3,4); (4,3)\}$

$\text{card}(C) = 6$

$$P[A] = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P[B] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad P[C] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$A \cap B = \{(1,2); (1,4); (1,6)\} \quad \text{card}(A \cap B) = 3$

$A \cap C = C \quad \text{card}(A \cap C) = 6$

$B \cap C = \{(1,6)\} \quad \text{card}(B \cap C) = 1$

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)} = \frac{1}{2} = P[A]$$

$\Rightarrow A$ e B sono indipendenti.

$$P[A|C] = \frac{P[A \cap C]}{P[C]} = \frac{\text{card}(A \cap C)}{\text{card}(C)} = 1 \neq P[A]$$

$\Rightarrow A$ e C sono dipendenti.

$$P[B|C] = \frac{P[B \cap C]}{P[C]} = \frac{\text{card}(B \cap C)}{\text{card}(C)} = \frac{1}{6} = P[B]$$

$\Rightarrow B$ e C sono indipendenti.

OSSERVAZIONE

Dati tre eventi A, B e C, se A è indipendente da B e da C $\not\Rightarrow$ A è indipendente da $B \cap C$.

Esempio: Lancio di due dadi

Chiamiamo:

A l'evento "ottenere 7 come punteggio".
B l'evento "ottenere 4 sul primo dado".
C l'evento "ottenere 3 sul secondo dado".

$A = \{(1,6); (6,1); (2,5); (5,2); (3,4); (4,3)\}$
$B = \{(4,1); (4,2); (4,3); (4,4); (4,5); (4,6)\}$
$C = \{(1,3); (2,3); (3,3); (4,3); (5,3); (6,3)\}$

$$\text{card}(A) = \text{card}(B) = \text{card}(C) = 6.$$

$$\text{card}(\Omega) = 36 \Rightarrow P[A] = P[B] = P[C] = \tfrac{1}{6}$$

$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{1}{6} = P[A]$ (A e B indipendenti)
$P[A|C] = \frac{P[A \cap C]}{P[C]} = \frac{1}{6} = P[A]$ (A e C indipendenti)
$P[A|B \cap C] = \frac{P[A \cap B \cap C]}{P[B \cap C]} = 1 \neq P[A]$

quindi A non è indipendente da $B \cap C$.

È possibile generalizzare la nozione di eventi indipendenti al caso di 3 o più eventi.
DEFINIZIONE: Tre eventi A, B e C si dicono INDIPENDENTI se

$$P[A \cap B \cap C] = P[A]P[B]P[C]$$
$$P[A \cap B] = P[A]P[B]$$
$$P[A \cap C] = P[A]P[C]$$
$$P[B \cap C] = P[B]P[C]$$

DEFINIZIONE: Dati n eventi $A_1, ..., A_n$, essi si dicono INDIPENDENTI se

$P[A_i \cap A_j] = P[A_i]P[A_j], \quad i \neq j$
$P[A_i \cap A_j \cap A_k] = P[A_i]P[A_j]P[A_k] \; i \neq j \neq k \neq i$
$\vdots$
$\vdots$

$$P[\bigcap_{i=1}^{n} A_i] = \prod_{i=1}^{n} P[A_i]$$

OSSERVAZIONE
Eventi incompatibili (o disgiunti o mutuamente esclusivi) NON sono eventi indipendenti.
Infatti dati A, B incompatibili $\Rightarrow A \cap B = \varnothing \Rightarrow P[A \cap B] = 0$. Se A e B fossero indipendenti allora avremmo $P[A \cap B] = P[A]P[B]$ e le due espressioni coincidono se e solo se $P[A]P[B] = 0$, cioè una fra $P[A]$ e $P[B]$ (o entrambe) è nulla, e quindi se uno fra A e B (o entrambi) è l'evento impossibile.

TEOREMA: Se tre eventi sono indipendenti, allora ognuno di essi è indipendente da qualunque evento si possa costruire con gli altri due.
Lo verifichiamo con un esempio.

Dati A, B e C indipendenti, proviamo che A è indipendente da $B \cup C$.

$$\begin{aligned}
&P[A \cap (B \cup C)] = P[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \\
&= P[A \cap B] + P[A \cap C] - P[A \cap B \cap C] \\
&= P[A]P[B] + P[A]P[C] - P[A]P[B]P[C] \\
&= P[A] \left(P[B] + P[C] - P[B]P[C]\right) \\
&= P[A] \left(P[B] + P[C] - P[B \cap C]\right) \\
&= P[A]P[B \cup C].
\end{aligned}$$

CIRCUITI IN PARALLELO

Un sistema costituito da n componenti si dice in PARALLELO se funziona fintanto che almeno uno dei componenti funziona.
Sia dato un sistema in parallelo per il quale il j-esimo componente funziona con probabilità p_j, INDIPENDENTEMENTE da tutti gli altri, con $j = 1, ..., n$.
Qual è la probabilità che il sistema funzioni?

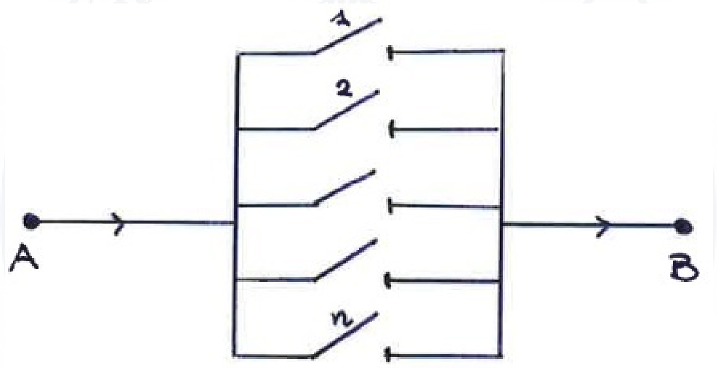

Figura 9

Chiamiamo A_j l'evento "il j-esimo componente funziona" e S l'evento "il sistema funziona".
$P[S] = 1 - P[\overline{S}] = 1 - P[\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap ... \cap \overline{A}_n]$
poichè il sistema non funziona se nessun componente funziona.
I componenti sono indipendenti, quindi

$$P[\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap ... \cap \overline{A}_n] = P[\overline{A}_1] \cdot P[\overline{A}_2] \cdot \ldots \cdot P[\overline{A}_n] =$$
$$= (1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_n)$$

quindi $P[S] = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-p_i)$

CIRCUITI IN SERIE

Un sistema costituito da n componenti si dice in SERIE se funziona solo se tutti i componenti funzionano.

Sia dato un sistema in serie per il quale il j-esimo componente funziona con probabilità p_j, INDIPENDENTEMENTE da tutti gli altri, con $j = 1, ..., n$. Qual è la probabilità che il sistema funzioni?

Figura 10

Chiamiamo A_j l'evento "il j-esimo componente funziona" e S l'evento "il sistema funziona".

$P[S] = P[A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n]$

I componenti sono indipendenti, quindi

$$P[A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n] = P[A_1] \cdot P[A_2] \cdot \ldots \cdot P[A_n] =$$
$$= p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$$

quindi $P[S] = \prod_{i=1}^{n} p_i$

È possibile costruire impianti elettrici con componenti disposti sia in serie che in parallelo all'interno dello stesso sistema e la probabilità di funzionamento del sistema permette di stabilire l'affidabilità del circuito costruito.

Esempi

1) Dato il seguente impianto elettrico:

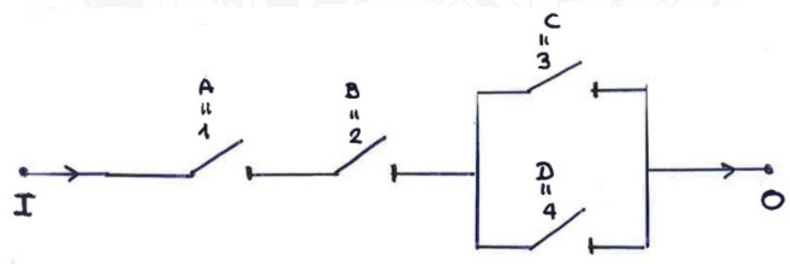

Figura 11

e date le seguenti probabilità di funzionamento dei componenti:

$P[A] = P[B] = 0.9; \quad P[C] = P[D] = 0.8$

Calcolare:

- la probabilità che l'impianto funzioni.
- la probabilità che il componente C non funzioni, dato che l'impianto funziona.

Sia S l'evento "il sistema funziona".

$$P[S] = P[A \cap B \cap (C \cup D)] \underset{\text{indipendenza}}{=} P[A]P[B]P[C \cup D]$$

$$P[C \cup D] = 1 - P[\overline{C \cup D}] = 1 - P[\overline{C} \cap \overline{D}] \underset{\text{indipendenza}}{=} 1 - P[\overline{C}]P[\overline{D}]$$

Quindi

$$P[S] = 0.9 \cdot 0.9 \cdot (1 - 0.2 \cdot 0.2) = 0.7776$$

La seconda domanda ci chiede di calcolare $P[\overline{C}|S]$. Utilizzando Bayes abbiamo:

$$P[\overline{C}|S] = \frac{P[S|\overline{C}]P[\overline{C}]}{P[S]}.$$

Ma $P[S|\overline{C}] = P[A \cap B \cap D] = P[A]P[B]P[D] = 0.9^2 \cdot 0.8$, quindi

$$P[\overline{C}|S] = \frac{0.9^2 \cdot 0.8 \cdot 0.2}{0.7776} = 0.16667$$

2) Dato il seguente impianto elettrico:

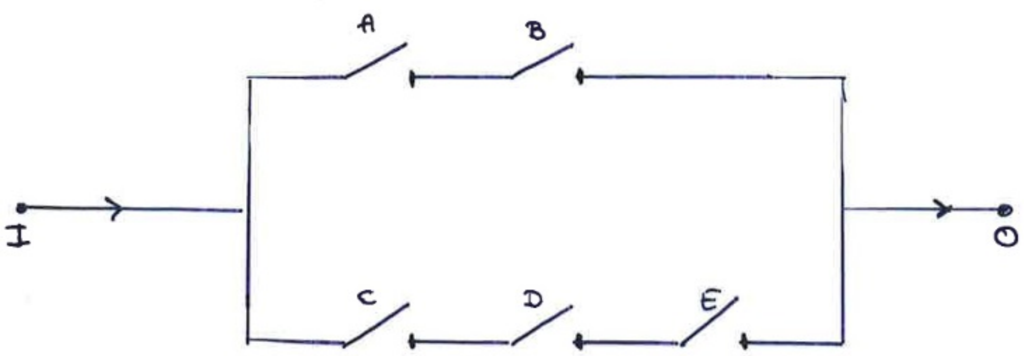

Figura 12

e date le seguenti probabilità di funzionamento dei componenti:
$P[A] = P[B] = 0.7; \quad P[C] = P[D] = P[E] = 0.8$
Calcolare:

- la probabilità che l'impianto funzioni.
- la probabilità che il componente A non funzioni, dato che l'impianto funziona.

Sia F il sottosistema costituito da A e B e G il sottosistema costituito da C, D ed E e S l'evento "il sistema funziona".
$P[S] = P[F \cup G] = 1 - P[\overline{F \cup G}] = 1 - P[\overline{F} \cap \overline{G}] =$
$= 1 - P[\overline{F}]P[\overline{G}]$
Ma

$P[F] = P[A \cap B] = P[A]P[B]$
$P[\overline{F}] = 1 - P[F] = 1 - P[A]P[B]$
analogamente
$P[G] = P[C \cap D \cap E] = P[C]P[D]P[E]$
$P[\overline{G}] = 1 - P[C]P[D]P[E]$
Quindi
$P[S] = 1 - (1 - 0.7^2)(1 - 0.8^3) = 0.7511$
e

$$P[\overline{A}|S] = \frac{P[S|\overline{A}]P[\overline{A}]}{P[S]} = \frac{P[C \cap D \cap E]P[\overline{A}]}{P[S]}$$
$$= \frac{0.8^3 \cdot 0.3}{0.7511} = \frac{0.1536}{0.7511} = 0.2045$$