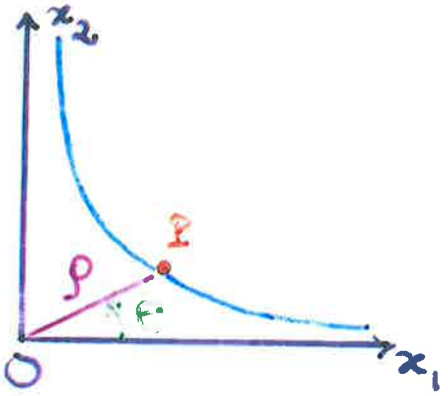
CINEMATICA

1) Un punto P è mobile nel piano Ox_1x_2 con la legge:

$$\begin{cases} x_1(t) = C e^{-pt} \\ x_2(t) = C e^{pt} \end{cases} \qquad c > 0$$

Determinare la traiettoria, la velocità areale rispetto ad O e l'accelerazione radiale e trasversa.



$$\frac{x_1}{c} = e^{-pt} = \frac{1}{e^{pt}} = \frac{c}{x_2}$$

$x_1 x_2 = c^2$ ramo di iperbole.

moto piano

$$\dot{A} \doteq \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}\left(x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(c e^{-pt} \cdot p c e^{pt} + p c e^{-pt} c e^{pt}\right) = p c^2 \quad \text{costante}$$

Allora il moto è centrale.

$\vec{a} = a_\rho \bar{r} + a_\theta \bar{h}$ ma in un moto centrale $a_\theta \equiv 0$

$$a_\rho = a = \sqrt{\ddot{x}_1^2 + \ddot{x}_2^2}$$

$\dot{x}_1 = -pc\, e^{-pt} \qquad \ddot{x}_1 = cp^2 e^{-pt}$

$\dot{x}_2 = pc\, e^{pt} \qquad \ddot{x}_2 = c p^2 e^{pt}$

$$a_\rho = c p^2 \sqrt{e^{-2pt} + e^{2pt}}$$

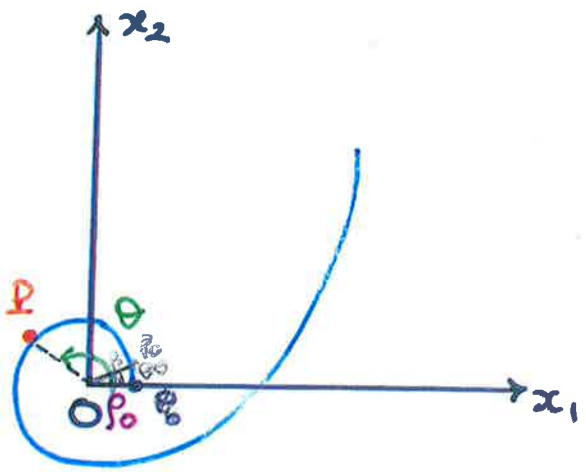
ma $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = C\sqrt{e^{-2pt} + e^{2pt}}$

quindi:

$$a_\rho = \cancel{C}p^2 \cdot \frac{\rho}{\cancel{C}} = p^2 \rho$$

2) Un punto P è mobile nel piano Ox_1x_2 con velocità costante in modulo e con velocità radiale rispetto ad O costante in modulo.
Determinare la traiettoria.

Utilizzando le coordinate polari: (ρ, θ)



$$\bar{v} = \dot{\rho}\,\bar{r} + \rho\dot{\theta}\,\bar{h}$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2} = \text{costante}$$

$$|\bar{v}_\rho| = \dot{\rho} = \text{costante}$$

Quindi:

$$\begin{cases} \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 = C_1 \\ \dot{\rho} = C_2 \end{cases}$$

Integro la 2ª: $\boxed{\rho(t) = \rho_0 + C_2 t}$

Dalla 1ª ricavo:

$$(\rho\dot{\theta})^2 = C_1 - \dot{\rho}^2 = C_1 - C_2^2 \doteq k^2 \Rightarrow \rho\dot{\theta} = k$$

$$\dot{\theta} = \frac{k}{\rho} = \frac{k}{\rho_0 + C_2 t}$$ che integrata fornisce la soluzion

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \frac{k}{\rho_0 + C_2\tau}\,d\tau = \theta_0 + \frac{k}{C_2}\int_0^t \frac{d(C_2\tau)}{\rho_0 + C_2\tau}$$

$$= \theta_0 + \frac{k}{C_2}\int_0^t \frac{d(\rho_0 + C_2\tau)}{\rho_0 + C_2\tau} = \theta_0 + \frac{k}{C_2}\log|\rho_0 + C_2\tau|\Big|_0^t$$

quindi:

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{k}{C_2}\left(\log|\underbrace{\rho_0 + C_2 t}_{=\rho(t)}| - \log|\rho_0|\right) = \theta_0 + \frac{k}{C_2}\log\frac{\rho(t)}{\rho_0}$$

Per determinare la traiettoria bisogna eliminare t.

$$\frac{(\theta-\theta_0)C_2}{k} = \log\frac{\rho}{\rho_0} \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = e^{\frac{C_2}{k}(\theta-\theta_0)}$$

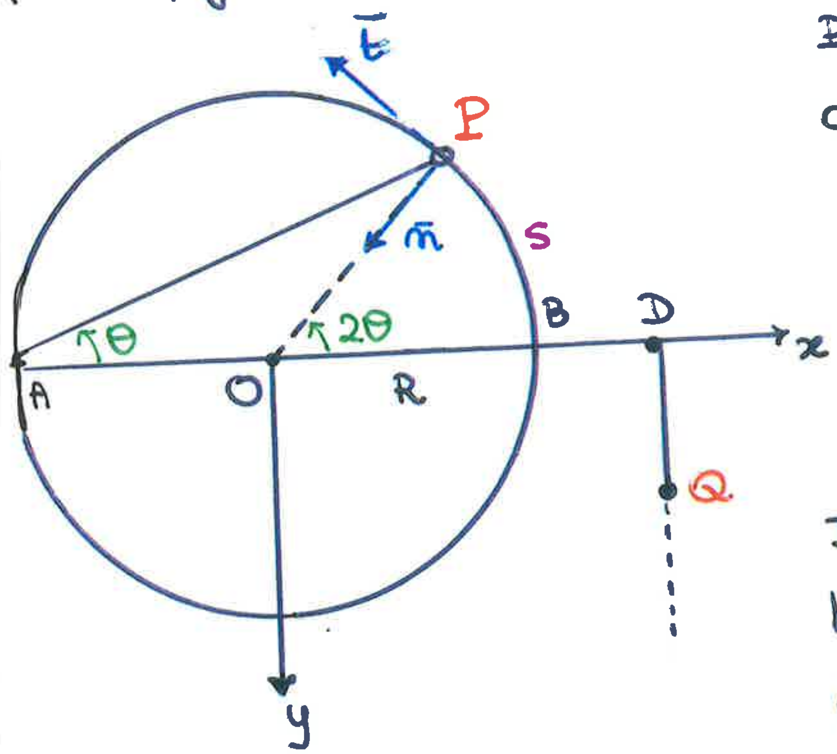
perciò:

$$\boxed{\rho = \rho_0\, e^{\frac{C_2}{k}(\theta-\theta_0)}}$$

spirale logaritmica

5

Calcolare la velocità e l'accelerazione dei punti P e Q (vedi figura) in funzione del parametro $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.



P e Q sono collegati da un filo inestendibile

<u>DATI</u>:

ℓ = lunghezza filo

$d = \overline{AD}$; $d > 2R$

$\ell > d + 2R$

Il sistema $S = \{P, Q\}$ ha 1 grado di libertà

$q = \theta \in (0, \pi/2)$

$= R\,2\theta = 2R\theta$

er determinare $\bar{v}, \bar{a}$ di P utilizziamo la terna ntrinseca:

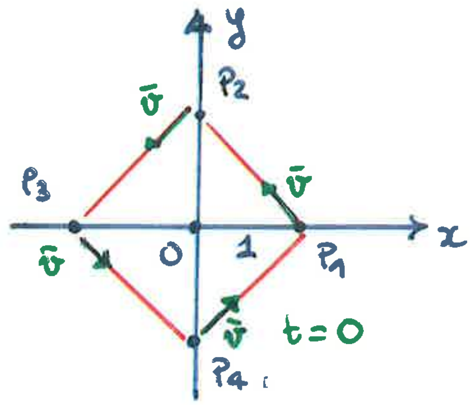
$$\bar{v}_P = \dot{s}\,\bar{t} = 2R\dot{\theta}\,\bar{t}$$

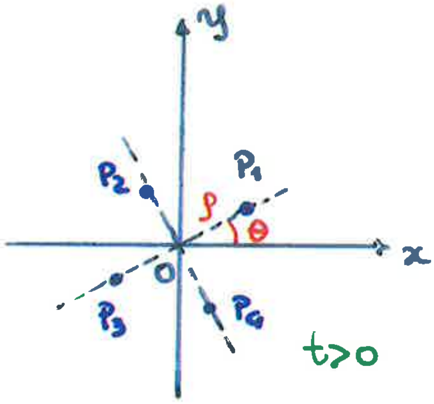
$$\bar{a}_P = \ddot{s}\,\bar{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{n} = 2R\ddot{\theta}\,\vec{t} + \frac{4R^{\cancel{2}}\dot{\theta}^2}{\cancel{R}}\vec{n}$$

Per determinare $\bar{v}, \bar{a}$ di Q utilizziamo le coordinate cartesiane:

$$\begin{cases} \bar{v}_Q = \dot{y}\,\bar{J} \quad \text{dove} \quad y = \overline{DQ} = \ell - d - 2R\cos\theta \\ \quad = 2R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta}\,\bar{J} \\ \bar{a}_Q = \ddot{y}\,\bar{J} = (2R\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + 2R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\ddot{\theta})\,\bar{J} \end{cases}$$

4) Per $t=0$ 4 punti occupano i vertici di un quadrato inscritto in una circonferenza di $R=1$.
Ogni P_i ha velocità scalare v costante e $\forall t>0$ $\vec{v}(P_i) \parallel P_{i+1}P_i$. Determinare la traiettoria dei P_i e il tempo di impatto dei 4 punti.





Per $t>0$ $\quad \bar{v} = \dot{\rho}\,\hat{r} + \rho\dot{\theta}\,\hat{\theta}$

ma essendo $\bar{v} \parallel P_{i+1}P_i$ l'angolo tra P_2P_1 e OP_1 è $\alpha = \pi/4$.

$\bar{v} = -v\cos\alpha\,\hat{r} + v\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\hat{\theta}$

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -v\cos\alpha = -\dfrac{v}{\sqrt{2}} \\ \rho\dot{\theta} = v\,\mathrm{sen}\,\alpha = \dfrac{v}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \dot{\rho} + \rho\dot{\theta} = 0$$

$$-\theta + \theta_0 = \log \rho/\rho_0 \Rightarrow \rho(\theta) = \overset{\overset{1}{\shortparallel}}{\rho_0}\, e^{(\theta_0-\theta)} = e^{(\theta_0-\theta)}$$

spirale logaritmica.

I punti si incontrano quando $\rho = 0$ $\quad P_i \to O$ (punto).

$$\rho(t) = \rho_0 - \frac{v}{\sqrt{2}}t = 1 - \frac{v}{\sqrt{2}}t \Rightarrow t^* = \frac{\sqrt{2}}{v}$$

$\rho_0^i = 1 \quad \theta_0^i = \frac{\pi}{2}(i-1) \quad i = 1, 2, 3, 4.$

nel caso generale di n punti P_i che occupano i vertici di un poligono regolare inscritto in una circonferenza di raggio unitario.

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -v\cos\alpha \\ \rho\dot{\theta} = v\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases} \qquad \rho(t) = \rho_0 - (v\cos\alpha)\,t = 1 - v\cos\alpha\, t$$

$$\dot{\theta} = v\,\mathrm{sen}\,\alpha \cdot \frac{1}{1 - v\cos\alpha\, t}$$

$$\theta - \theta_0 = v\,\mathrm{sen}\,\alpha \int_0^t \frac{dt}{1 - v\cos\alpha t} = -\mathrm{tg}\,\alpha \int_0^t \frac{d(1 - v\cos\alpha t)}{1 - v\cos\alpha t}$$

$$\frac{\theta_0 - \theta}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \log(1 - v\cos\alpha t)\Big|_0^t = \log\rho$$

$$\rho(\theta) = e^{\frac{(\theta_0 - \theta)}{\mathrm{tg}\,\alpha}}$$ traiettoria $\qquad \alpha = \frac{n-2}{n}\frac{\pi}{2}$

$n = 4 \quad \alpha = \pi/4$

$n = 5$

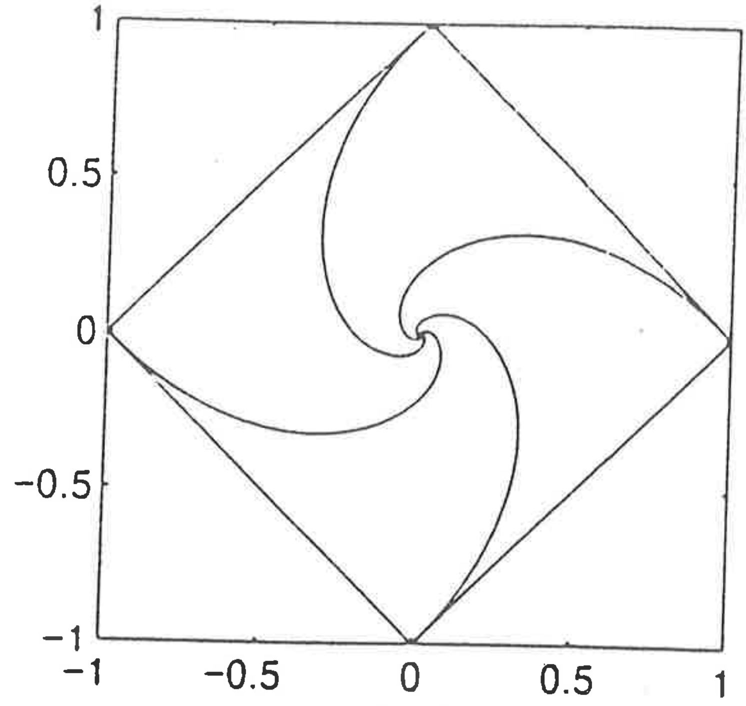
6

8

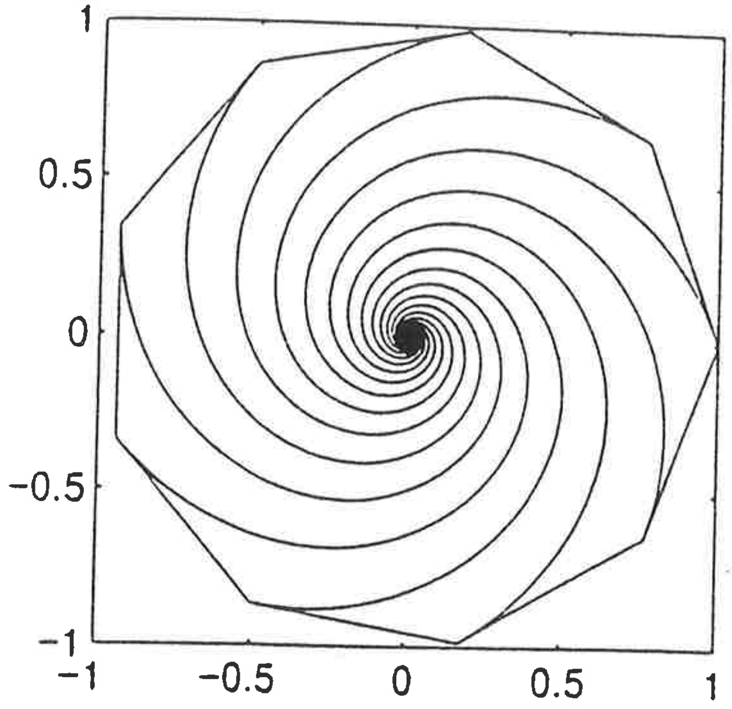
mentre il tempo di impatto

$$t^* = \frac{1}{v\cos\alpha}$$

$$\rho_0^i = 1 \qquad \theta_0^i = \frac{2\pi}{n}(i-1) \qquad i = 1, \dots, n$$



$n = 4$



$n = 9$