COMPOSIZIONE DEGLI STATI CINETICI

Lo stato cinetico $\bar{v}(P)$, in un determinato istante, si può presentare come somma di due stati cinetici $\bar{v}_1(P)$, $\bar{v}_2(P)$ perciò $\bar{v}(P) = \bar{v}_1(P) + \bar{v}_2(P)$.

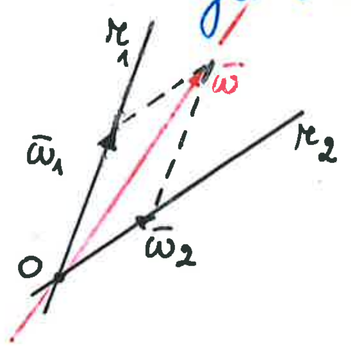
La composizione consiste nel sommare punto per punto le velocità relative agli stati cinetici componenti.

1) Due stati cinetici di traslazione si compongono in uno stato cinetico di traslazione.

$\bar{v}_1(P) = \bar{u}_1$, $\bar{v}_2(P) = \bar{u}_2$ indip. da P.

$\Rightarrow \bar{v}(P) = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$ indip. da P.

2) Due stati cinetici di rotazione attorno ad assi istantanei concorrenti si compongono in uno stato cinetico di rotazione con asse istantaneo concorrente con gli assi degli stati componenti.



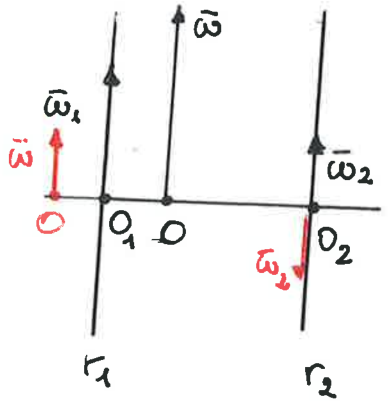
$r_1 \cap r_2 \equiv O$ pto è possibile mettere $\bar{\omega}_1$ e $\bar{\omega}_2$ con origine in O.

$\bar{v}_1(P) = \bar{\omega}_1 \times (P-O)$

$\bar{v}_2(P) = \bar{\omega}_2 \times (P-O)$

$\bar{v}(P) = (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) \times (P-O) = \bar{\omega} \times (P-O)$.

3) Due stati cinetici di rotazione attorno ad assi istantanei paralleli con $\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 \neq \bar{0}$ si compongono in uno stato cinetico di rotazione con asse istantaneo parallelo agli assi degli stati componenti.



$\bar v_1(P) = \bar\omega_1 \times (P-O_1)$, $\bar v_2(P) = \bar\omega_2 \times (P-O_2)$

$\bar v(P) = \bar\omega_1 \times (P-O_1) + \bar\omega_2 \times (P-O_2)$

se $\bar\omega_1 \neq -\bar\omega_2$ allora esiste sulla retta O_1O_2 un punto O tale che:

$\bar\omega_1 \times (O_1 - O) = \bar\omega_2 \times (O - O_2)$

Qualunque sia O, questi due vettori hanno uguale direzione (ortogonale al piano di $\bar\omega_1, \bar\omega_2$); perchè abbiano uguale verso O è interno ad $\overline{O_1O_2}$ quando ω_1 e $\bar\omega_2$ hanno lo stesso verso, esterno ad $\overline{O_1O_2}$ se hanno verso opposto; perchè abbiano ugual modulo

$$\omega_1 \cdot \overline{O_1O} = \omega_2 \cdot \overline{OO_2}$$

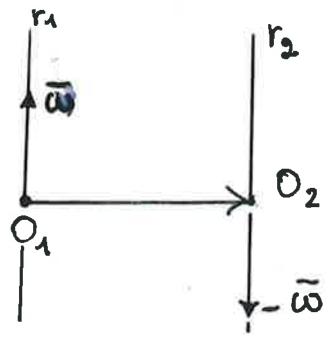
cioè $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{OO_2}{O_1O}$ (proporzionalità inversa)

allora:

$$\bar v(P) = \bar\omega_1 \times (P-O_1) + \bar\omega_2 \times (P-O_2) + \underbrace{\bar\omega_1 \times (O_1 - O) + \bar\omega_2 \times (O_2 - O)}_{=\bar 0}$$

$$= \bar\omega_1 \times (P-O) + \bar\omega_2 \times (P-O) = (\underbrace{\bar\omega_1 + \bar\omega_2}_{\vec\omega}) \times (P-O)$$

4) Due stati cinetici di rotazione con assi istantanei paralleli e velocità angolari uguali e di verso opposto si compongono in uno stato cinetico di traslazione in direzione ortogonale al piano degli assi.



$\bar\omega_1 = \bar\omega$, $\bar\omega_2 = -\bar\omega$

$\bar v_1(P) = \bar\omega \times (P-O_1)$, $\bar v_2(P) = -\bar\omega \times (P-O_2)$

$\bar v(P) = \bar\omega \times (P-O_1) - \bar\omega \times (P-O_2)$

$= \bar\omega \times (O_2 - O_1)$ indipendente da P

ortogonale ad O_1O_2.

Se lo stato cinetico di traslazione $\bar{v}(P)$ è $\perp$ ad $\bar{\omega}$ esiste sempre un vettore $(O_2 - O_1) \perp \bar{v}(P)$ tale che:

$$\bar{v}(P) = \bar{\omega} \times (O_2 - O_1).$$

5) Due stati cinetici, uno di traslazione, l'altro di rotazione con asse istantaneo ortogonale alla traslazione, si compongono in uno stato cinetico di rotazione con asse istantaneo parallelo all'asse della rotazione data.

Sia $\bar{v}_1(P) = \bar{\omega} \times (P - O_2)$ stato cinetico di rotazione

$\bar{v}_2(P) = \bar{u} \perp \bar{\omega}$ stato cinetico di traslazione

$\overset{!}{=} \bar{\omega} \times (O_2 - O_1)$ (per il pto 4)

allora:

$$\bar{v}(P) = \bar{\omega} \times (P - O_2) + \bar{\omega} \times (O_2 - O_1) = \bar{\omega} \times (P - O_1)$$

con asse ist. passante per O_1 anziché per O_2.

6) Uno stato cinetico di traslazione e uno stato cinetico di rotazione si compongono sempre in uno stato cinetico elicoidale. (teorema di Mozzi)

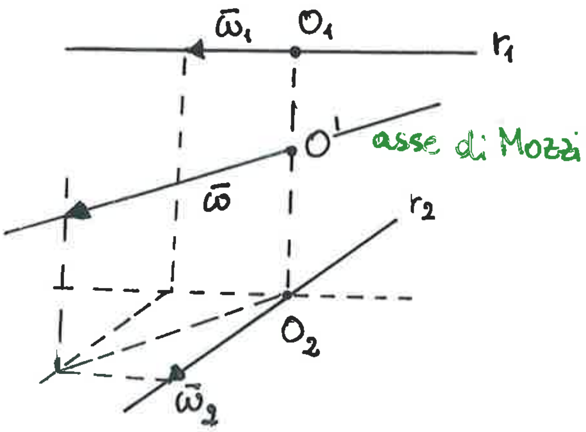
$\bar{v}_1(P) = \bar{\omega} \times (P - O_1)$, $\bar{v}_2(P) = \bar{u} = \bar{v}_2^{\parallel}(P) + \bar{v}_2^{\perp}(P)$ rispetto a $\bar{\omega}$

$$\bar{v}(P) = \bar{v}_2^{\parallel}(P) + \underbrace{\bar{\omega} \times (P - O_1) + \bar{v}_2^{\perp}(P)}_{\overset{\text{per } 5}{=} \ \bar{\omega} \times (P - O') \quad O' \neq O_1.}$$

$= \bar{v}_2^{\parallel}(P) + \bar{\omega} \times (P - O')$ e $\bar{v}_2^{\parallel}(P) \equiv \bar{v}(O')$ sost. O' a P.

$= \bar{v}_{O'} + \bar{\omega} \times (P - O')$ $\bar{v}_{O'} \parallel \bar{\omega}$.

17) Due stati cinetici di rotazione attorno a due assi istantanei sghembi si compongono in uno stato cinetico elicoidale.



$$\bar v_1(P) = \bar\omega_1 \times (P - O_1)$$

$$\bar v_2(P) = \bar\omega_2 \times (P - O_2)$$

$$\bar v(P) = \bar\omega_1 \times (P - O_1) + \bar\omega_2 \times (P - O_2) + \bar\omega_1 \times (P - O_2) - \bar\omega_1 \times (P - O_2)$$

$$= \underbrace{(\bar\omega_1 + \bar\omega_2)}_{\bar\omega} \underbrace{\times (P - O_2)}_{\text{rot.}} + \underbrace{\bar\omega_1 \times (O_2 - O_1)}_{\text{trasl. indip. da } P}$$

(per 6) lo stato cinetico risultante è elicoidale.

L'asse dello stato cinetico elicoidale è l'asse di Mozzi.

Infatti:

$\bar\omega_1 \times (O_2 - O_1) = \bar u$ atto traslatorio ortogonale ad $(O_2 - O_1)$.

$\bar u = \bar u^{\parallel} + \bar u^{\perp}$ ad $\bar\omega = \bar\omega_1 + \bar\omega_2$.

$$\bar v(P) = \underbrace{\bar\omega \times (P - O_2) + \bar u^{\perp}}_{(\text{per } 5)} + \bar u^{\parallel}$$

$\exists\ O' \neq O_2$:

$\bar v(P) = \bar\omega \times (P - O') + \bar u^{\parallel}$

$\bar v(O') \equiv \bar u^{\parallel}$ e quindi

$\bar v(P) = \bar v_{O'} + \bar\omega \times (P - O')$ con $\bar v_{O'} \parallel \bar\omega$ $(= \bar\omega_1 + \bar\omega_2)$.

Il supporto di $\bar\omega$ è l'asse istantaneo di rototraslazione ovvero l'asse di Mozzi.

Analogia tra asse centrale e asse di Mozzi

"distribuzione" dei momenti di un Σ_a di vettori applicati

$$\bar{M}_{O'} = \bar{M}_O + \bar{R} \times (O'-O)$$

$$I = \bar{M}_O \cdot \bar{R} = \bar{M}_{O'} \cdot \bar{R} \quad , \forall O'$$

scomposizione di $\bar{M}_O$ rispetto ad $\bar{R}$

$$\bar{M}_O = \bar{M}_O^{//} + \bar{M}_O^{\perp} = \lambda \bar{R} + \bar{M}_O^{\perp}$$

con $\lambda = \frac{I}{R^2}$ indipendente da O

$(\bar{M}_O \cdot \bar{R} = \lambda R^2)$

se $\bar{R} \neq \bar{0}$ $\exists$ retta: asse centrale

i cui punti O' hanno $\bar{M}_{O'} = \bar{0}$ o

$\bar{M}_{O'} \parallel \bar{R}$, cioè:

$$\bar{M}_{O'} = \bar{M}_O^{//} = \frac{(\bar{M}_O \cdot \bar{R})}{R^2} \bar{R} = \frac{(\bar{M}_O \cdot \bar{R})}{R} \bar{u}_R$$

di equazione

$$O'-O = \frac{[(O'-O) \cdot \bar{R}]}{R^2} \bar{R} + \frac{\bar{R} \times \bar{M}_O}{R^2}$$

$$= \lambda(O') \bar{R} + \frac{\bar{R} \times \bar{M}_O}{R^2}$$

Tale retta è $\parallel$ ad $\bar{R}$.

$$\bar{M}_{O'} = \bar{0} \quad \text{se} \quad I = 0$$

$$|\bar{M}_O| = \sqrt{\left(\frac{I}{R}\right)^2 + (M_O^{\perp})^2} > \frac{I}{R} = |\bar{M}_O^{//}|$$

per O' $\in$ asse $\bar{M}_{O'} = \bar{M}_O^{//}$ è di modulo minimo.

distribuzione delle velocità di un sistema rigido

$$\bar{v}_P = \bar{v}_{O'} + \bar{\omega} \times (P-O')$$

$$\bar{v}_P \cdot \bar{\omega} = \bar{v}_{O'} \cdot \bar{\omega} \quad , \forall P$$

scomposizione di $\bar{v}_{O'}$ rispetto ad $\bar{\omega}$

$$\bar{v}_{O'} = \bar{v}_{O'}^{//} + \bar{v}_{O'}^{\perp} = \lambda_1 \bar{\omega} + \bar{v}_{O'}^{\perp}$$

con $\lambda_1 = \frac{\bar{v}_{O'} \cdot \bar{\omega}}{\omega^2}$ indip. da O'

$(\bar{v}_{O'} \cdot \bar{\omega} = \lambda_1 \omega^2)$

se $\bar{\omega} \neq \bar{0}$ $\exists$ retta: asse di Mozzi

i cui punti M hanno $\bar{v}_M = \bar{0}$ o

$\bar{v}_M \parallel \bar{\omega}$, cioè:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_{O'}^{//} = \frac{(\bar{v}_{O'} \cdot \bar{\omega})}{\omega^2} \bar{\omega} = \frac{(\bar{v}_{O'} \cdot \bar{\omega})}{\omega} \bar{u}_\omega$$

di equazione

$$M-O' = \frac{[(M-O') \cdot \bar{\omega}]}{\omega^2} \bar{\omega} + \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_{O'}}{\omega^2}$$

$$= \lambda(M) \bar{\omega} + \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_{O'}}{\omega^2}$$

Tale retta è $\parallel$ ad $\bar{\omega}$.

$$\bar{v}_M = \bar{0} \quad \text{se} \quad \bar{\omega} \cdot \bar{v}_{O'} = 0$$

$$|\bar{v}_{O'}| = \sqrt{\left(\frac{\bar{v}_{O'} \cdot \bar{\omega}}{\omega}\right)^2 + (v_{O'}^{\perp})^2} > |\bar{v}_{O'}^{//}|$$

per M $\in$ asse di Mozzi, $\bar{v}_M$ ha modulo minimo.

Esercizi sulla composizione degli stati cinetici

Osservazione Dati due stati cinetici rotatori $(O_1, \bar{\omega}_1)$ $(O_2, \bar{\omega}_2)$ per stabilire lo stato cinetico risultante basta verificare la complanarità o meno dei vettori $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, (O_1 - O_2)$.

Se i 3 vettori sono complanari $\Rightarrow$ prodotto misto è nullo.

$$\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 \cdot (O_1 - O_2) = 0$$

a) se non sono complanari $\Rightarrow$ s.c. elicoidale

b) se sono complanari distinguiamo 3 casi:

1) $\vec{\omega}_1 \nparallel \vec{\omega}_2 \Rightarrow$ s.c. rotatorio

2) $\vec{\omega}_1 \parallel \vec{\omega}_2$ ma $\vec{\omega}_1 \neq -\vec{\omega}_2 \Rightarrow$ s.c. rotatorio

3) $\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_2 \Rightarrow$ s.c. traslatorio

1) Comporre i seguenti s.c. rotatori:

$$\vec{v}_i(P) = \vec{\omega}_i \times (P - O_i) \qquad i = 1, 2$$

$O_1(3, -5, 0)$; $O_2(0, 0, 1)$

$\bar{\omega}_1(-3, 0, 1)$; $\bar{\omega}_2(2, 1, 0)$

$(O_1 - O_2) = (3, -5, -1)$

$$\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 \cdot (O_1 - O_2) = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 10 - 3 = -10 \neq 0$$

s.c. elicoidale

• Determinare l'eq. cartesiana dell'asse di Mozzi.

Ricordiamo che l'asse di Mozzi è una retta $\parallel \bar{\omega}$:

$$\bar{v}_M \parallel \bar{\omega} \quad \text{o} \quad \bar{v}_M = \bar{0} \qquad \forall M \in \text{asse}$$

Preso $P \equiv O$ (origine del rif. $Oxyz$)

$$\bar{v}_O = \bar{\omega}_1 \times (O - O_1) + \bar{\omega}_2 \times (O - O_2)$$

$$\begin{cases} \bar{v}_M = \dfrac{\bar{v}_O \cdot \bar{\omega}}{\omega^2} \vec{\omega} \\ M - O = \dfrac{\bar{\omega} \times \bar{v}_O}{\omega^2} + \lambda \vec{\omega} \end{cases}$$

$$\bar{v}_O = (-3, 0, 1) \times (-3, 5, 0) + (2, 1, 0) \times (0, 0, -1) =$$

$$= (-5, -3, -15) + (-1, 2, 0) = (-6, -1, -15)$$

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 = (-1, 1, 1)$$

$$\omega^2 = 3$$

$I_\omega = \bar{v}_O \cdot \bar{\omega} = 6 - 1 - 15 = -10 \neq 0$ s.c. elicoidale

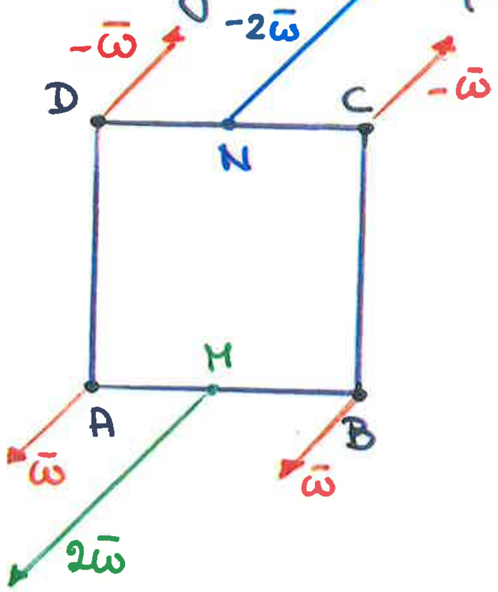
$$\bar{v}_M = -\frac{10}{3} \vec{\omega} \quad \text{e} \quad |\bar{v}_M| = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$\bar{\omega} \times \bar{v}_O = (-1, 1, 1) \times (-6, -1, -15) = (-14, -21, 7)$$

$$1: \begin{cases} x = -\dfrac{14}{3} - \lambda \\ y = -\dfrac{21}{3} + \lambda \\ z = \dfrac{7}{3} + \lambda \end{cases}$$ eq. parametrica

$$-\left(x + \frac{14}{3}\right) = y + 7 = z - \frac{7}{3}$$ eq. cartesiana dell'asse di Mozzi.

2) Dati $(A,\bar{\omega})$; $(B,\bar{\omega})$; $(C,-\bar{\omega})$; $(D,-\bar{\omega})$ dove A, B, C, D sono i vertici di un quadrato di lato l ed $\bar{\omega}$ è ortogonale al quadrato, determinare lo s.c. risultante



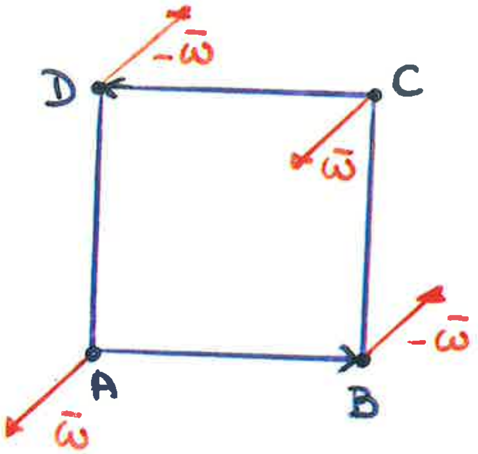
$(A,\bar{\omega})+(B,\bar{\omega}) \Rightarrow$ s.c. rotatorio $(M, 2\bar{\omega})$

$(C,-\bar{\omega})+(D,-\bar{\omega}) \Rightarrow$ s.c. rotatorio $(N, -2\bar{\omega})$

$-2\bar{\omega}+2\bar{\omega}=\bar{0}$

$(M,2\bar{\omega})+(N,-2\bar{\omega}) \Rightarrow$ s.c. traslatorio definito da $\bar{v}=2\bar{\omega}\times(N-M)$

3) Dati $(A,\bar{\omega})$; $(B,-\bar{\omega})$; $(C,\bar{\omega})$; $(D,-\bar{\omega})$ come es. 2)



$(A,\bar{\omega})+(B,-\bar{\omega}) \Rightarrow$ s.c. traslatorio

$\bar{\omega}-\bar{\omega}=\bar{0}$ $\qquad$ $\bar{v}_1=\bar{\omega}\times(B-A)$

$(C,\bar{\omega})+(D,-\bar{\omega}) \Rightarrow$ s.c. traslatorio

$\bar{\omega}-\bar{\omega}=\bar{0}$ $\qquad$ $\bar{v}_2=\bar{\omega}\times(D-C)$

Componendo i due stati cinetici traslatori:

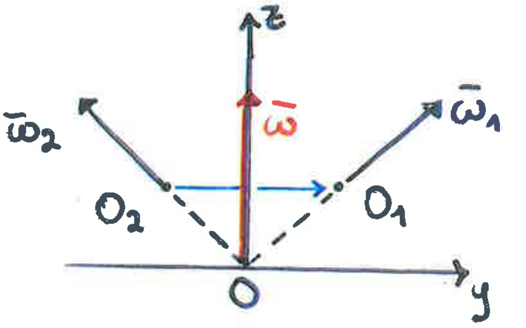
$$\bar{v}=\bar{v}_1+\bar{v}_2=\bar{\omega}\times(B-A)+\bar{\omega}\times(D-C)$$

$$=\bar{\omega}\times(B-A)-\bar{\omega}\times(B-A)\equiv\bar{0}$$

$\Rightarrow$ s.c. risultante è nullo.

4) Comporre i seguenti s.c. rotatori:

a) $\begin{cases} O_1\,(0,1,1) \\ \bar\omega_1\,(0,1,1) \end{cases}$ $\begin{cases} O_2\,(0,-1,1) \\ \bar\omega_2\,(0,-1,1) \end{cases}$



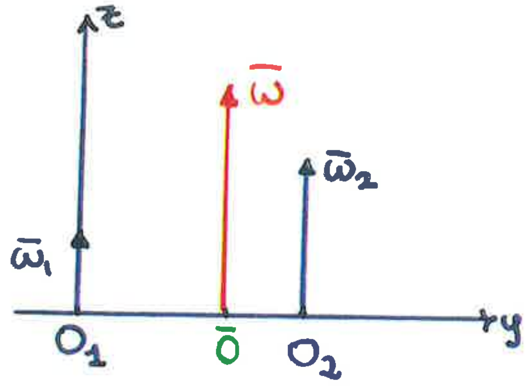
$\bar\omega = (0,0,2)$

I due assi di ist. rotazione concorrono in O.

$\Rightarrow$ s.c. è rotatorio attorno ad Oz.

$\bar\omega_1, \bar\omega_2, (O_1-O_2) \in Oyz$, ma $\bar\omega_1 \not\parallel \bar\omega_2$.

b) $\begin{cases} O_1\,(0,0,0) \\ \bar\omega_1\,(0,0,1) \end{cases}$ $\begin{cases} O_2\,(0,3,0) \\ \bar\omega_2\,(0,0,2) \end{cases}$



$\bar\omega = (0,0,3)$

$\bar\omega_1 \parallel \bar\omega_2$ ma $\bar\omega_1 \neq -\bar\omega_2$

$\bar\omega_1, \bar\omega_2, (O_1-O_2) \in Oxy$

$\Rightarrow$ s.c. rotatorio attorno ad una retta $\parallel Oz$.

$\bar\omega$ applicato in un punto $\bar O$ in modo che:

$$\frac{|O_1-\bar O|}{|O_2-\bar O|} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \Rightarrow \bar O\,(0,2,0)$$

c) $\begin{cases} O_1\,(0,0,1) \\ \bar\omega_1\,(0,3,0) \end{cases}$ $\begin{cases} O_2 = (0,0,0) \\ \bar\omega_2\,(4,0,0) \end{cases}$

$\bar\omega_1, \bar\omega_2, (O_1-O_2)$ non sono complanari

$\Rightarrow$ s.c. elicoidale

$\Rightarrow \exists$. Asse di Mozzi

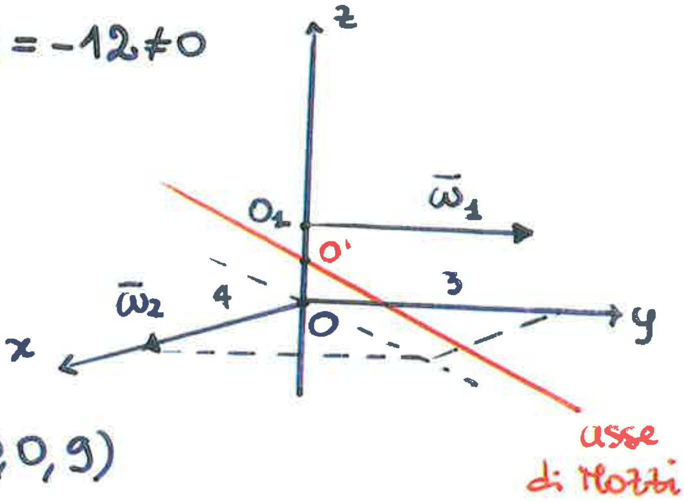
$\bar\omega = (4,3,0)$ e $\omega^2 = 25$

$\bar v_O = \bar\omega_1 \times (O-O_1) + \bar\omega_2 (\underbrace{O-O_2}_{=0}) = (0,3,0)\times(0,0,-1) = (-3,0,$

$I_\omega = \bar{\omega} \cdot \bar{v}_O = (4, 3, 0) \cdot (-3, 0, 0) = -12 \neq 0$

$\bar{v}_M = \dfrac{I_\omega}{\omega^2}\, \bar{\omega} = -\dfrac{12}{25}\, \bar{\omega}$

$|\bar{v}_M| = \dfrac{12}{5}$



$\bar{\omega} \times \bar{v}_O = (4, 3, 0) \times (-3, 0, 0) = (0, 0, 9)$

$$\begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \dfrac{9}{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{3} \\ z = \dfrac{9}{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{4} x \\ z = \dfrac{9}{25} \end{cases} \qquad O'\left(0, 0, \dfrac{9}{25}\right)$$

5) Comporre i seguenti s.c. rotatori:

i) $\begin{cases} O_1 (1, 1, 1) \\ \bar{\omega}_1 (1, 1, 0) \end{cases} \quad \begin{cases} O_2 (0, 1, 1) \\ \bar{\omega}_2 (-1, 0, 0) \end{cases} \quad \begin{cases} O_3 (0, 0, 1) \\ \bar{\omega}_3 (0, -1, 0) \end{cases}$

$\bar{\omega} = (0, 0, 0)$

$\bar{v}_O = \sum_{i=1}^{3} \bar{\omega}_i \times (O - O_i) = (1, 1, 0) \times (-1, -1, -1) +$

$+ (-1, 0, 0) \times (0, -1, -1) + (0, -1, 0) \times (0, 0, -1)$

$= (0, 0, 1) \neq \bar{0}$

$\Rightarrow$ s.c. traslatorio nella direzione di Oz.

ii) $\begin{cases} O_1 (0, 0, 3) \\ \bar{\omega}_1 (1, 0, 0) \end{cases} \quad \begin{cases} O_2 (0, 1, 0) \\ \bar{\omega}_2 (1, 0, 0) \end{cases} \quad \begin{cases} O_3 (0, -1, 0) \\ \bar{\omega}_3 (1, 0, 0) \end{cases}$

$\bar{\omega} = (3, 0, 0)$

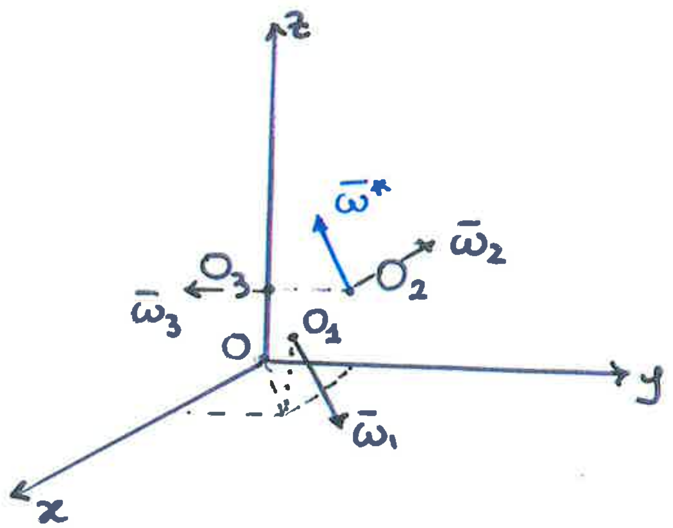
$\bar{v}_O = (0, 3, 0)$

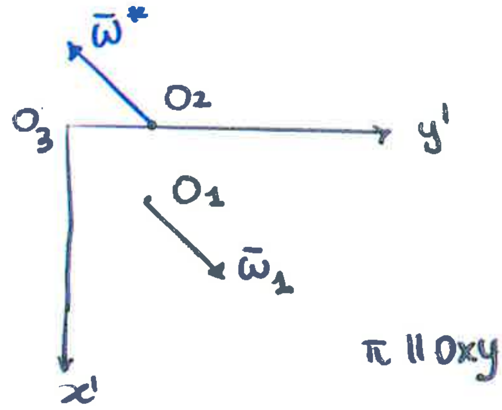
$I_\omega = \bar{\omega} \cdot \bar{v}_O = 0 \Rightarrow \bar{v}_M \equiv \bar{0} \Rightarrow$ s.c. rotatorio.

$\Rightarrow$ asse di Mozzi $\equiv$ asse di ist. rotazione

Graficamente

a)





$\bar\omega^* = \bar\omega_2 + \bar\omega_3 = (-1,-1,0)$ applicato in O_2 poiché in esso concorrenti

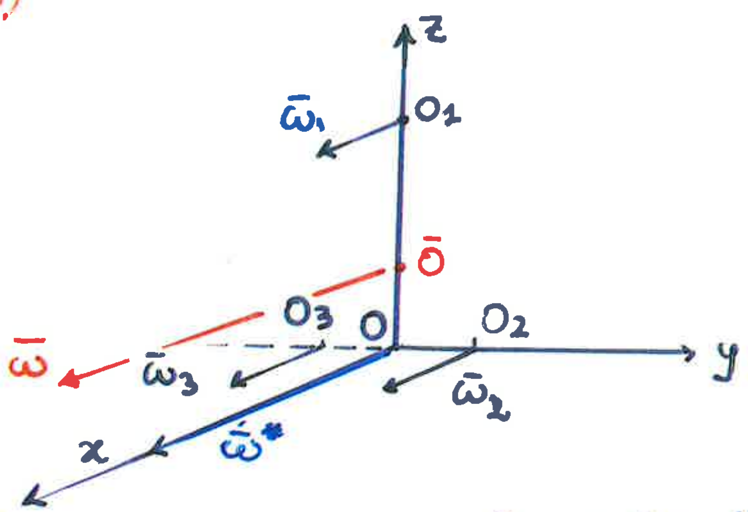
$\bar\omega^*(-1,-1,0)$ $\quad O_2(0,1,1)$

$\bar\omega_1(1,+1,0)$ $\quad O_1(1,1,1)$

$\bar\omega_1 \parallel \bar\omega^*$ e $\bar\omega_1 = -\bar\omega^*$

$\Rightarrow$ s.c. traslatorio nella direzione Oz.

b)



$\bar\omega^* = \bar\omega_2 + \bar\omega_3 = (2,0,0)$ applicato in O.

$\bar\omega^* \parallel \bar\omega_1$ e per la legge dei momenti

$(O_1 - \bar O)\omega_1 = (O - \bar O)\omega^* \Rightarrow \bar O - O = (0,0,1)$