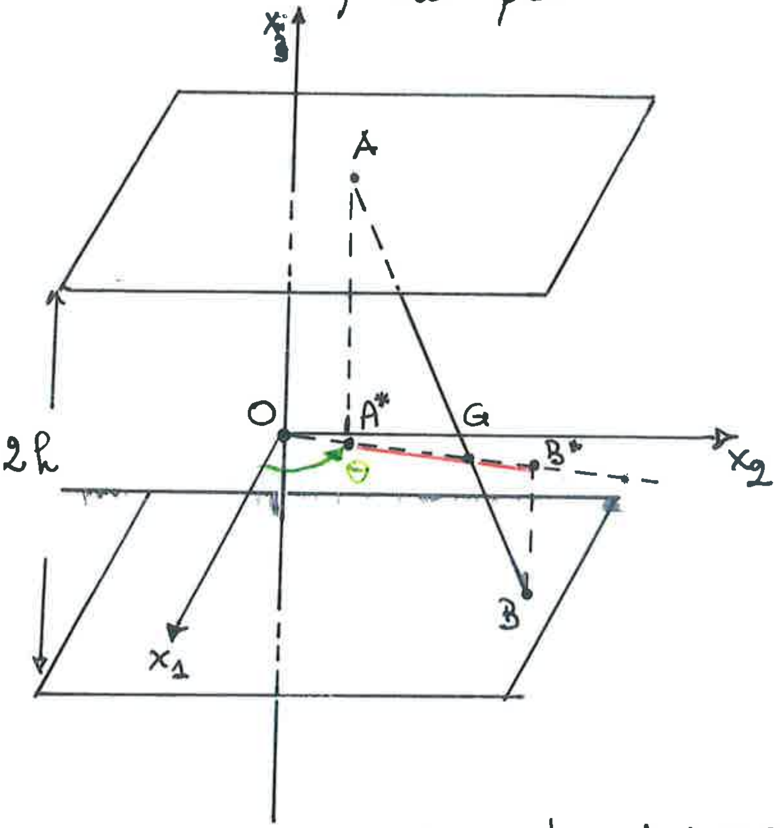
[82] **Esempio**. Moto di un'asta AB di lunghezza 2ℓ con gli estremi A e B vincolati a muoversi su due piani paralleli e distinti (distanza $2h$ $(h<\ell)$)



O è equidistante dai 2 piani, quindi il punto medio G di AB $\in Ox_1x_2$

Il moto dell'asta AB è un moto rigido piano. Le velocità dei suoi punti si mantengono parallele al piano Ox_1x_2 (π).

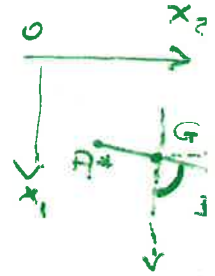
Basta studiare il moto di una figura piana nel suo piano cioè il moto di A^*B^*.

Il sistema ha 3 g. di libertà $\quad q_1 = x_{1G},\ q_2 = x_{2G},\ q_3 = \theta$

Scelto un rif. con assi $\parallel$ a quelli fissi centrato in G.

$Gx_1'x_2'x_3'$, poichè $\bar{v}_G \perp \bar{\omega}(=\dot{\theta}\,\bar{i}_3)$ $\exists$ punto C :

$$\bar{v}_G = \bar{\omega}\times(G-C) = \dot{\theta}\,\bar{i}_3\times(G-C)$$



$\forall P \quad \bar{v}_P = \bar{v}_G + \bar{\omega}\times(P-G)$

$$= \bar{\omega}\times(G-C) + \bar{\omega}\times(P-G) = \bar{\omega}\times(P-C)$$

atto di moto rotatorio attorno ad un asse passante per C e parallelo ad x_3.

Determiniamo le coordinate di $C = (x_{1C}, x_{2C}, x_{3C})$.

$$\bar{v}_G = \dot{x}_{1G}\,\bar{i}_1 + \dot{x}_{2G}\,\bar{i}_2$$

$$\bar{v}_G = \dot{\theta}\,\bar{i}_3\times\left[(x_{1G}-x_{1C})\,\bar{i}_1 + (x_{2G}-x_{2C})\,\bar{i}_2 - \overset{\overline{0}}{x_{3C}}\,\bar{i}_3\right]$$

cioè: $\bar{v}_G = -(x_{2G} - x_{2C})\dot{\theta}\,\bar{\iota}_1 + (x_{1G} - x_{1C})\dot{\theta}\,\bar{\iota}_2$

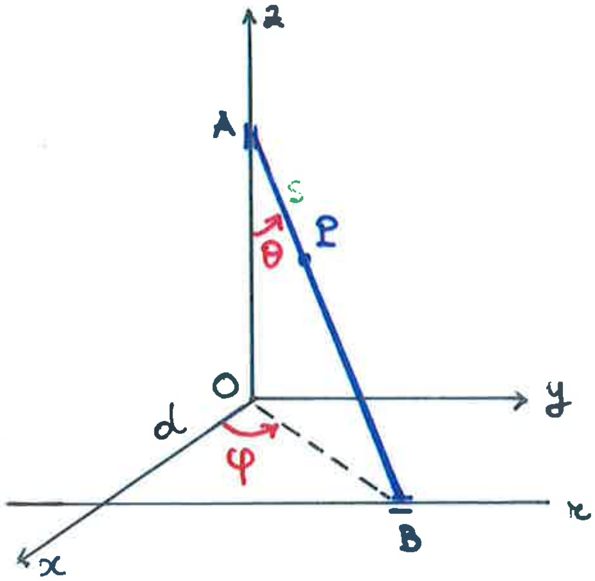
quindi:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1G} = \dot{\theta}(x_{2C} - x_{2G}) \\ \dot{x}_{2G} = \dot{\theta}(x_{1G} - x_{1C}) \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} x_{1C} = x_{1G} - \dfrac{\dot{x}_{2G}}{\dot{\theta}} \\ x_{2C} = x_{2G} + \dfrac{\dot{x}_{1G}}{\dot{\theta}} \end{cases}$$

C centro di istantanea rotazione.



$\overline{AB}: L$

1 g. di l.

$$\begin{cases} q_1 = \theta \\ q_2 = \varphi \end{cases} \rightarrow \text{trovare il legame}$$

$\overline{OA} = L\cos\theta$

$\overline{OB} = L\sin\theta$

$$\begin{cases} x_B = L\sin\theta\cos\varphi \\ x_B = d \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$L\sin\theta\cos\varphi = d$$

$A(0, 0, L\cos\theta)$

$B(L\sin\theta\cos\varphi, L\sin\theta\sin\varphi, 0) = (d, L\sin\theta\sin\varphi, 0)$

C.R.

- $\bar{v}_A = \underset{\bar{0}}{\underset{\parallel}{\bar{v}_C}} + \bar{\omega} \times (A-C)$

  $\bar{v}_A \cdot \bar{\omega} = \bar{\omega} \times (A-C) \cdot \bar{\omega} \equiv 0 \implies \bar{\omega} \perp \bar{v}_A$

  $\bar{v}_A = -L\sin\theta\dot{\theta}\bar{k} \implies \bar{\omega} \in Oxy$

- $\bar{v}_B = \underset{\bar{0}}{\underset{\parallel}{\bar{v}_C}} + \bar{\omega} \times (B-C)$

  $\bar{v}_B \cdot \bar{\omega} = \bar{\omega} \times (B-C) \cdot \bar{\omega} \equiv 0 \implies \bar{\omega} \perp \bar{v}_B$

  $\bar{v}_B = L(\cos\theta\,\dot{\theta}\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi})\,\vec{j} \implies \bar{\omega} \in Oxz$

$\underline{\underline{\bar{\omega} \parallel Ox}}$

$\bar{V}_A = \bar{V}_B + \bar{\omega} \times (A-B)$

$\dot{z}_A\bar{k} = \dot{y}_B\bar{j} + \omega\vec{i} \times (-x_B\bar{i} - y_B\bar{j} + z_A\bar{k})$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{z}_A = -\omega y_B \\ 0 = \dot{y}_B - \omega z_A \end{cases} \rightsquigarrow -L\sin\theta\dot{\theta} = -\omega L\sin\theta\sin\varphi$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\omega = \frac{\dot{\theta}}{\sin\varphi}}$$

$\forall P \in \overline{AB}: \overline{AP} = s$

$P\left(s\frac{d}{L}, s\sin\theta\sin\varphi, (L-s)\cos\theta\right)$ $\bar{v}_P(0, \dot{y}_P, \dot{z}_P) \in Oyz$.

$\uparrow$ piano fisso

MOTO RIGIDO PIANO