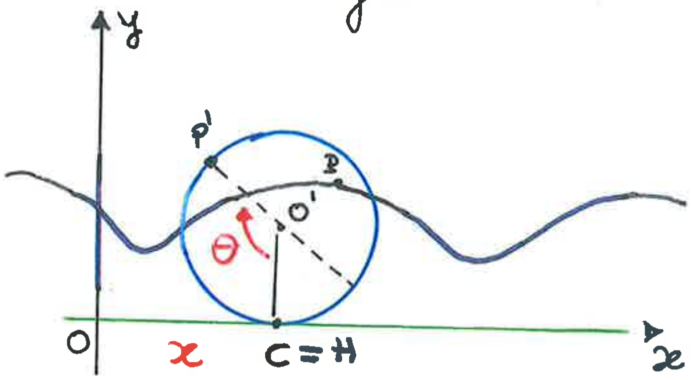
Esempio: Disco che rotola senza strisciare su una guida rettilinea.



La traiettoria di un generico punto del disco è una CICLOIDE.

se $P \in \mathcal{C}$ $\begin{cases} x = R(\theta - \operatorname{sen}\theta) \\ y = R(1-\cos\theta) \end{cases}$

Poichè la base e la rulletta sono le uniche 2 coppie di curve che hanno tangente comune e la rulletta rotola senza strisciare sulla base (C punto di contatto ≡ centro di ist. rotazione), in questo esempio la retta Ox è la base e il disco è la rulletta. Il centro di ist. rot C coincide col punto di contatto H.

Il disco ha 1 solo grado di libertà. Infatti scelti:

$$\begin{cases} q_1 = x_C = x \\ q_2 = \theta \end{cases} \Rightarrow \quad x_{O'} = x$$

- $\bar{v}_{O'} = \dot{x}\,\bar{i}$

ma $\bar{v}_{O'} = \underset{\bar{0}}{\underset{|||}{\bar{v}_C}} + \bar{\omega} \times (O'-C) = \bar{\omega} \times (O'-C)$

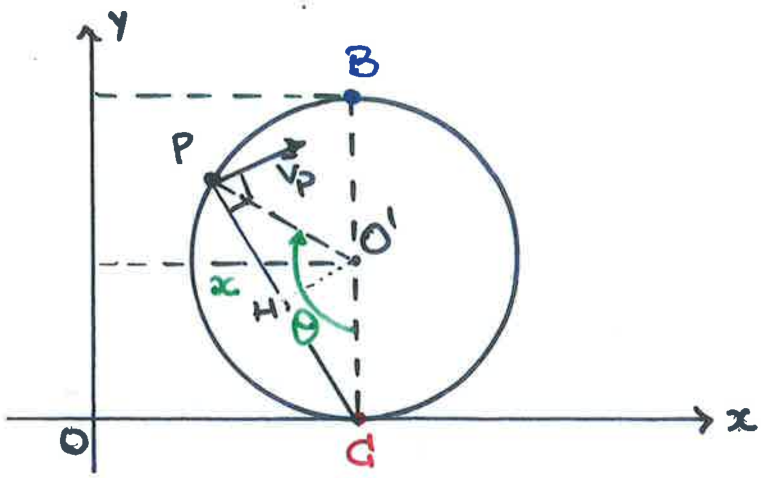
il disco ha un atto di moto rotatorio attorno a C con vel. ang. $\bar{\omega} = -\dot{\theta}\,\bar{k}$.

- $\bar{v}_{O'} = -\dot{\theta}\,\bar{k} \times R\,\bar{j} = R\dot{\theta}\,\bar{i} \quad \Longrightarrow \quad \dot{x} = R\dot{\theta}$

Il vincolo di rotolamento senza strisciamento impone un legame tra x e θ: $\dot{x} = R\dot{\theta}$ che è integrabile

$x = R\theta + x_0 \Rightarrow$ il vincolo è OLONOMO.

OSSERVAZIONE



$\exists !$ g. di l. $\bar{\omega} = -\dot{\theta}\vec{k}$

$\dot{x} = R\dot{\theta}$

$q_1 = x$ oppure $q_1 = \theta$

$C(x, 0)$ $\quad \bar{v}_C = (\dot{x}, 0)$ NO

$B(x, 2R)$ $\quad \bar{v}_B = (\dot{x}, 0)$ NO

$\vec{v}_C \equiv \vec{0}$

$$\bar{v}_{O'} = \underset{\vec{0}}{\underset{\parallel}{\bar{v}_C}} + \bar{\omega} \times (O' - C) = -\dot{\theta}\vec{k} \times R\bar{j} = R\dot{\theta}\vec{i} = \dot{x}\vec{i}$$

$$\bar{v}_B = \underset{\vec{0}}{\underset{\parallel}{\bar{v}_C}} + \bar{\omega} \times (B - C) = -\dot{\theta}\vec{k} \times 2R\bar{j} = 2R\dot{\theta}\vec{i} = 2\dot{x}\vec{i}$$

la velocità di B è doppia di quella di O'

Anche se l'ascissa di C, O', B è sempre x.
la velocità dei 3 pti non è la stessa $(= \dot{x})$!!

$\forall P \in \mathcal{C}$

$\bar{v}_P = \bar{\omega} \times (P - C)$ è $\perp$ a $(P - C)$.

$|\bar{v}_P| = \omega\, |P - C| = \dot{\theta}\, \overline{PC} = 2R\dot{\theta} \sin\frac{\theta}{2} \to 2\dot{x} \sin\frac{x}{2R}$ $\quad \boxed{x = R\theta}$

$|P - C| = 2\,\overline{PH} = 2R\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = 2R\sin\frac{\theta}{2}$ $\quad \begin{cases} t = 0 \\ x_0 = 0 \\ \theta_0 = 0 \end{cases}$

oppure con Carnot

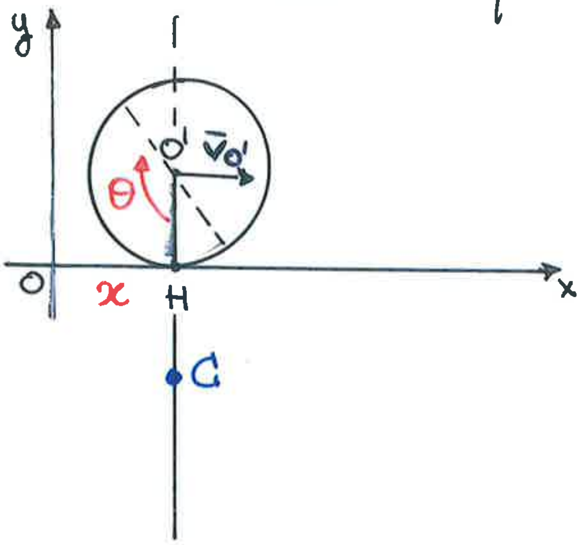
$$\overline{PC} = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2\cos\theta} = R\sqrt{2(1 - \cos\theta)} = R\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= 2R\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

se il rotolamento avviene anche con strisciamento, i due parametri x, θ sono tra loro indipendenti e il disco ha 2 gradi di libertà. Il punto di contatto H non è il centro di istantanea rotazione.

Determiniamo in questo caso C.



$x_{O'} (= x_H) = x$

• $\bar{v}_{O'} = \dot{x}\,\bar{\imath}$

$\bar{v}_H = \bar{v}_{O'} + \bar{\omega} \times (H - O')$
$= (\dot{x} - R\dot{\theta})\,\bar{\imath}$

Per il th. di Chasles il centro C si trova sulla normale a $\bar{v}_{O'}$.

$x_C = x_H = x_{O'} = x$

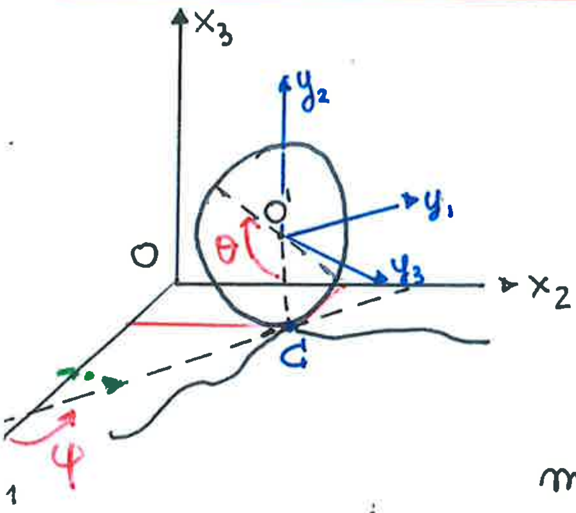
Per def. di centro di ist. rot. $\bar{v}_C \equiv \bar{0}$.

• $\bar{v}_{O'} = \bar{\omega} \times (O' - C) = -\dot{\theta}\,\bar{k} \times [\underset{0}{\underbrace{(x - x)}}\,\bar{\imath} + (R - \underbrace{y_c})\,\bar{\jmath}] = (R - y_c)\,\dot{\theta}\,\bar{\imath}$

da cui $\dot{x} = (R - y_c)\,\dot{\theta}$

perciò $y_c = R - \dfrac{\dot{x}}{\dot{\theta}}$ quindi $C = \left(x,\ R - \dfrac{\dot{x}}{\dot{\theta}}\right)$

Se il disco rotola senza strisciare nel piano Ox_1x_2



$q_1 = \theta$ angolo di rot. del disco

$q_2 = \varphi$ angolo che la tangente alla traiettoria in C forma con Ox.

$q_3 = x_{1O'}$, $q_4 = x_{2O'}$

$O'(x_{1O'}; x_{2O'}; R)$ • $\bar{v}_{O'} = \dot{x}_{1O'}\,\bar{\imath}_1 + \dot{x}_{2O'}\,\bar{\imath}_2$

ma $\bar{v}_{O'} = \underset{\bar{0}}{\underset{\parallel}{\bar{v}_C}} + \bar{\omega} \times (O' - C)$

$\bar{\omega} = \dot{\varphi}\,\bar{\imath}_3 + \dot{\theta}\,\bar{J}_3$ quindi • $\bar{v}_{O'} = (\dot{\varphi}\,\bar{\imath}_3 - \dot{\theta}\,\underset{\bar{J}_2}{\underset{\parallel}{\bar{J}_3}}) \times R\,\overset{\bar{J}_2}{\overset{\parallel}{\bar{\imath}_3}} = +R\dot{\theta}\,\bar{J}_1$

$\bar{J}_1 = +\cos\varphi\,\bar{\imath}_1 + \sin\varphi\,\bar{\imath}_2$

$\begin{cases} \dot{x}_{1O'} = +R\dot{\theta}\cos\varphi \\ \dot{x}_{2O'} = +R\dot{\theta}\sin\varphi \end{cases}$ non sono integrabili $\Rightarrow$ il vincolo è ANOLONOMO

Infatti se lo fossero esisterebbe una

$$\exists\, F(x_{10}, x_{20}, \theta, \varphi) : \frac{dF}{dt} = f(x_{10}, x_{20}, \theta, \varphi) = 0$$

$\Rightarrow F = \text{cost} \Rightarrow$ vincolo olonomo

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_{10}} \dot{x}_{10} + \frac{\partial F}{\partial x_{20}} \dot{x}_{20} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \dot{\varphi}$$

$$\frac{\dot{x}_{10}}{\dot{x}_{20}} = \cot g\varphi \Rightarrow \dot{x}_{10} \, tg\varphi - \dot{x}_{20} = 0$$ relazione di vincolo

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial x_{10}} = tg\varphi \longrightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x_{10} \partial \varphi} = 1 + tg^2\varphi$$

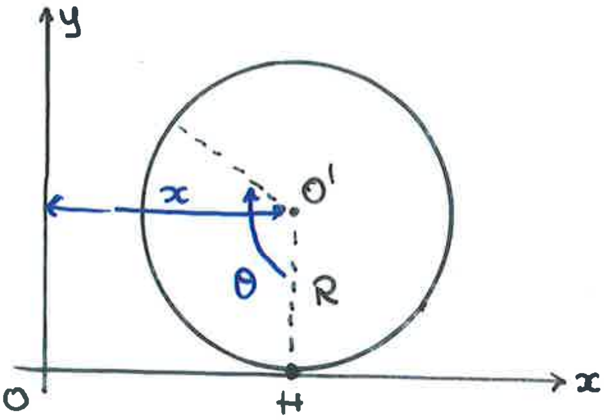
$$\frac{\partial F}{\partial x_{20}} = -1$$

$\parallel$ per Schwartz $\qquad \overset{?}{\downarrow} \; 1 + tg^2\varphi = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi \partial x_{10}} = 0$$

ESEMPIO : DISCO SU GUIDA RETTILINEA.



$$\bar{v}_H = \bar{v}_{O'} + \bar{\omega} \times (H - O')$$
$$= \dot{x}\,\bar{\imath} - \dot{\theta}\,\bar{k} \times (-R\,\bar{\jmath})$$
$$= \dot{x}\,\bar{\imath} - R\dot{\theta}\,\bar{\imath}$$
$$= (\dot{x} - R\dot{\theta})\,\bar{\imath}$$

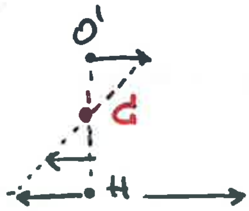
CASI

1) $\dot{x} = 0 \Rightarrow \bar{v}_H = -R\dot{\theta}\,\bar{\imath}$ $\quad C \equiv O'$ il disco ruota attorno ad O' e non trasla

2) $\dot{x} = R\dot{\theta} \Rightarrow \bar{v}_H = \bar{0}$ $\quad C \equiv H$ il disco rotola senza strisciare

3) $\dot{x} < R\dot{\theta} \Rightarrow \bar{v}_H = \underbrace{(\dot{x} - R\dot{\theta})}_{<0}\,\bar{\imath}$ il disco slitta

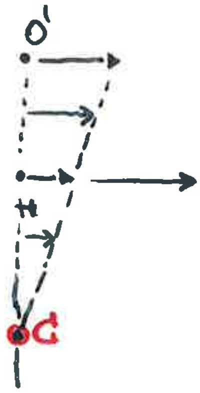
$$C \begin{cases} y_C = R - \dfrac{\dot{x}}{\dot{\theta}} > 0 \\ x_C = x_{O'} = x \end{cases}$$



$\bar{v}_H = \bar{\omega} \times (H - C)$

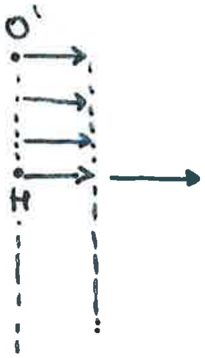
4) $\dot{x} > R\dot{\theta} \Rightarrow \bar{v}_H = \underbrace{(\dot{x} - R\dot{\theta})}_{>0}\,\bar{\imath}$ il disco striscia

$$C \begin{cases} y_C = R - \dfrac{\dot{x}}{\dot{\theta}} < 0 \\ x_C = x_{O'} = x \end{cases}$$



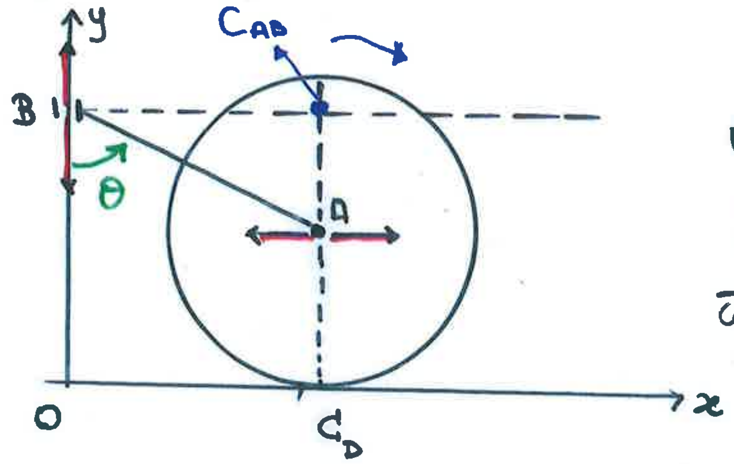
5) $\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \bar{v}_H = \dot{x}\,\bar{\imath}$ il disco trasla

$y_C \to -\infty$



$C \to \infty$

Disco che rotola senza strisciare su Ox. Asta AB con estremo A incernierato nel centro del disco e estremo B vincolato all' asse Oy. Verificare che $\bar{\omega}_D = -2\dot{\theta}\cos\theta\,\bar{k}$.



D : $\overline{AC} = R$

$\overline{AB}$: $\overline{AB} = 2R$

$\bar{\omega}_D = -\omega_D \bar{k}$

$\bar{\omega}_{AB} = \dot{\theta}\,\vec{k}$

$A\,(2R\sin\theta,\ R)$

$\bar{V}_A = (2R\cos\theta\,\dot{\theta}\ ,0)$

$\bar{V}_A = \underset{\overset{|||}{\bar{0}}}{\bar{V}_{C_D}} + \bar{\omega}_D \times (A - C_D) = -\omega_D \bar{k} \times R\bar{j} = R\omega_D \bar{i}$

$\Rightarrow \boxed{\omega_D = 2\cos\theta\,\dot{\theta}}$

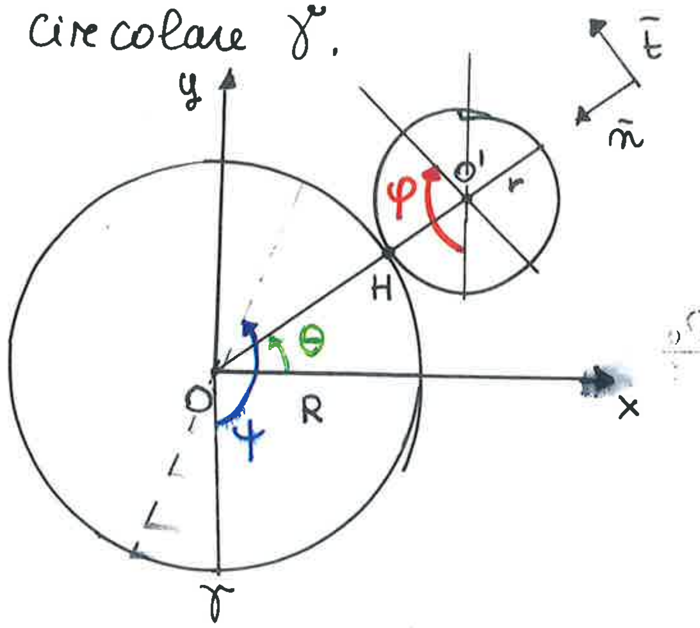
$\bar{\omega}_{AB} = \dot{\theta}\,\vec{k}$

RICORDA

$\bar{V}_{C_D}(t) \equiv 0$

$\bar{V}_{C_{AB}}(t) \equiv 0$

MOTO EPICICLOIDALE: moto di un punto di un disco che rotola senza strisciare all'esterno di un profilo circolare γ.



Distinguiamo due casi:

a) γ fisso

b) γ mobile

---

a) Il disco ha 1 g. di libertà.

$q_1 = \theta$ angolo geometrico

$q_2 = \varphi$ angolo di rot. del disco

Determiniamo il legame tra θ e φ.

$\bar{v}_{O'} = \bar{v}_H + \bar{\omega}_D \times (O'-H)$ $\quad \bar{v}_H \equiv \bar{0}$ rot. senza strisc. su γ fisso.

$= -\dot{\varphi}\,\bar{\imath}_3 \times (-r\,\bar{n}) = -r\dot{\varphi}\,\vec{t}$ $\quad H \equiv C$ centro di ist. rot.

$\bar{v}_{O'} = (R+r)\dot{\theta}\,\vec{t}$ $\quad \Rightarrow (R+r)\dot{\theta} = -r\dot{\varphi}$

integrando $(R+r)\theta = -r\varphi$.

b) Il disco ha 2 g. di libertà.

$q_1 = \theta$ ang. geom.

$q_2 = \varphi$ ang. di rot. del disco

$q_3 = \psi$ ang. di rot. di γ.

Determiniamo il legame tra θ, φ, ψ.

$\bar{v}_{O'} = (R+r)\dot{\theta}\,\vec{t}$

$\bar{v}_{O'} = \bar{v}_{H'} + \bar{\omega}_D \times (O'-H')$ $\quad H' \in D$

(•) $\bar{v}_{H'} = \bar{v}_{H''}$ $\quad H'' \in \gamma$ $\quad H'$ e H'' vanno a coincidere in H.

Il rot. senza strisciamento su γ mobile impone la (•).

$\bar{v}_{H''} = \bar{\omega}_\gamma \times (H''-O) = \dot{\psi}\,\bar{\imath}_3 \times (-R\,\bar{n}) = R\dot{\psi}\,\vec{t}$

quindi:

$$\bar{v}_{O'} = R\dot{\psi}\,\bar{t} - \dot{\varphi}\,\bar{\imath}_3 \times (-r\bar{n}) = (R\dot{\psi} - r\dot{\varphi})\,\bar{t}$$

allora:

$$(R+r)\,\dot{\theta} = R\dot{\psi} - r\dot{\varphi}$$

Integrando $(R+r)\theta = R\psi - r\varphi$.

In questo caso $H \neq C$.

Per il th. di Chasles, poiché $\bar{v}_{O'} \parallel \bar{t}$, si ha che C appartiene alla retta OO'.

- $\bar{v}_{O'} = \underset{\bar{0}}{\cancel{\bar{v}_C}} + \bar{\omega}_D \times (O'-C) = -\dot{\varphi}\,\bar{\imath}_3 \times [-(R+r-\rho_c)]\,\bar{n}$

$$= -(R+r-\rho_c)\,\dot{\varphi}\,\bar{t}$$

$\bar{v}_{H'} = \bar{v}_{H''}$

- $\bar{v}_{O'} = \bar{v}_{H'} + \vec{\omega}_D \times (O'-H') = \bar{v}_{H''} + \bar{\omega}_D \times (O'-H'')$

$$= R\dot{\psi}\,\bar{t} - \dot{\varphi}\,\bar{\imath}_3 \times (-r\bar{n}) = (R\dot{\psi} - r\dot{\varphi})\,\bar{t}$$

Uguagliando le due espressioni

$$R\dot{\psi} - \cancel{r\dot{\varphi}} = -R\dot{\varphi} - \cancel{r\dot{\varphi}} + \dot{\varphi}\,\rho_c$$

da cui $\qquad \rho_c = R\left(1 + \frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}}\right) \qquad \rho_c = |C-O|$

se il rotolamento avviene con strisciamento

In tal caso la velocità di strisciamento del punto di contatto non è nulla.

a') γ fisso

$$\bar{v}_{str} = \bar{v}_H = \bar{v}_{O'} + \bar{\omega}_D \times (H-O')$$

ma $\bar{v}_{O'} = (R+r)\dot{\theta}\,\bar{t}$

quindi

$$\bar{v}_{str} = (R+r)\dot{\theta}\,\bar{t} - \dot{\varphi}\,\bar{i}_3 \times r\bar{n} = [(R+r)\dot{\theta} + r\dot{\varphi}]\,\vec{t}$$

Il disco ha 2 g. di libertà $\Rightarrow$ non c'è più il legame tra θ e φ. $\begin{cases} s = R\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ \varphi \end{cases}$

b') γ mobile

$\bar{v}_{str} = \bar{v}_H = \bar{v}_{H''} - \bar{v}_{H'}$ dove $H' \in D$ e $H'' \in \gamma$.

$\bar{v}_{H''} = R\dot{\psi}\,\bar{t}$

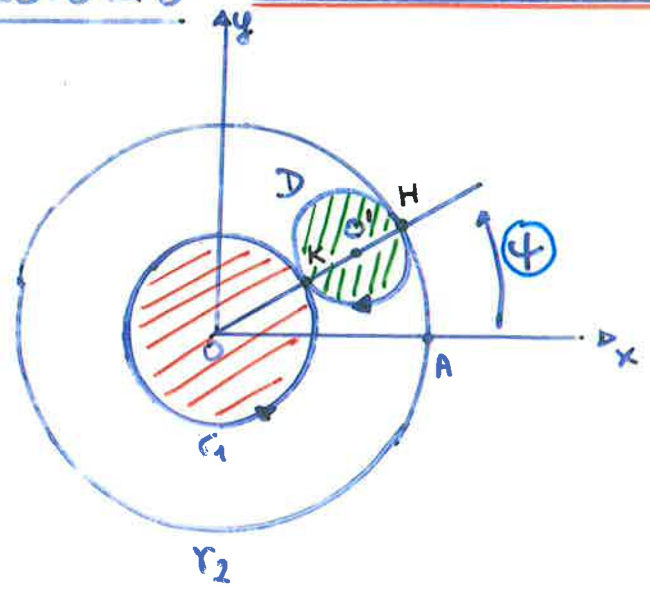
$\bar{v}_{H'} = \bar{v}_{O'} + \bar{\omega}_D \times (H' - O') = (R+r)\dot{\theta}\,\bar{t} - \dot{\varphi}\,\bar{i}_3 \times r\bar{n}$

$= [(R+r)\dot{\theta} + r\dot{\varphi}]\,\bar{t}$

$$\bar{v}_{str} = [R\dot{\psi} - (R+r)\dot{\theta} - r\dot{\varphi}]\,\bar{t}$$

Il disco ha 3 g. di libertà $\Rightarrow$ non c'è più il legame tra θ, φ, ψ. ■

Esercizio: "CUSCINETTO A SFERA"



γ_1: MOZZO ruota con vel. angolare $\bar{\omega}_1 = \omega_1 \bar{i}_3$ attorno ad Oz.

γ_2: fisso

D: disco che rotola senza strisciare su γ_1 e γ_2.

R: raggio di γ_2

r: raggio di γ_1.

$\left(\frac{R-r}{2}\right)$: raggio del disco D.

Sia $\bar{\omega}_2 = -\omega_2 \bar{i}_3$ la velocità angolare del disco attorno a H.

Posto $\omega_1 = \dot{\varphi}$, $\omega_2 = \dot{\theta}$ e indicato con ψ l'angolo geometrico $C\hat{O}A$, determinare il legame tra i parametri θ, φ, ψ ossia il grado di libertà del sistema mozzo + disco.

- Rot. senza strisciamento su γ_2 $\Rightarrow$ $\bar{v}_H = \bar{0}$ $\quad H \equiv C$ c.i.r.

  su γ_1 $\Rightarrow$ $\bar{v}_{K'} = \bar{v}_{K''}$ $\quad K' = K'' = K$

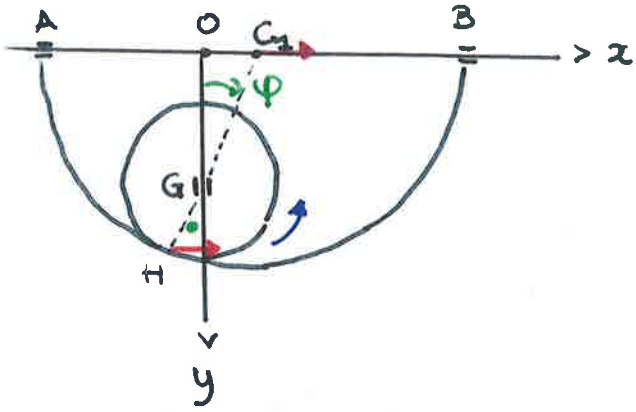
- $\bar{v}_{O'} = \overline{OO'}\dot{\psi}\,\bar{t} = \left(\frac{R+r}{2}\right)\dot{\psi}\,\bar{t}$
- $\bar{v}_{O'} = \underbrace{\cancel{\bar{v}_H}}_{=\bar{0}} + \bar{\omega}_D \times (O'-H) = \left(\frac{R-r}{2}\right)\dot{\theta}\,\bar{t}$
- $\bar{v}_{O'} = \bar{v}_{K'} + \bar{\omega}_D \times (O'-K') = \bar{v}_{K''} + \bar{\omega}_D \times (O'-K'')$

$\bar{v}_{K''} = r\dot{\varphi}\,\vec{t}$ $\qquad = r\dot{\varphi}\,\bar{t} - \left(\frac{R-r}{2}\right)\dot{\theta}\,\bar{t}$

Uguagliando:
$$\begin{cases} (R+r)\dot{\psi} = (R-r)\dot{\theta} \\ (R+r)\dot{\psi} = 2r\dot{\varphi} - (R-r)\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi = \frac{R-r}{R+r}\,\theta} \quad e \quad \boxed{\varphi = \frac{(R-r)}{r}\,\theta} \quad \Rightarrow 1!\ \text{g. d. libertà}$$

Disco di centro G che rotola senza strisciare all'interno di una semicirconferenza che trasla, con G vincolato ad appartenere all'asse Oy. Determinare $\bar{\omega}_D$.



$\overline{C_1H} = R$

$\overline{GH} = r$

$G(0, (R-r)\cos\varphi)$

• $\bar{v}_G(0, -(R-r)\sin\varphi\,\dot{\varphi})$

$H(-r\sin\varphi, R\cos\varphi)$

$\bar{v}_G = \bar{v}_H + \bar{\omega}_D \times (G-H)$

r.s.s. $\Rightarrow H \in \mathcal{D} = H'$ è tale che $\bar{v}_{H'} \equiv \bar{v}_{H''}$ dove $H'' \in \mathcal{C}$.

Tutti i punti $\in \mathcal{C}$ hanno la stessa velocità perchè trasla.

$\bar{v}_{H''} = \bar{v}_{C_1}$

$C_1((R-r)\sin\varphi, 0)$ $\quad \bar{v}_{C_1} = ((R-r)\cos\varphi\,\dot{\varphi}, 0)$

perciò $\bar{\omega}_D = -\omega_D \bar{k}$

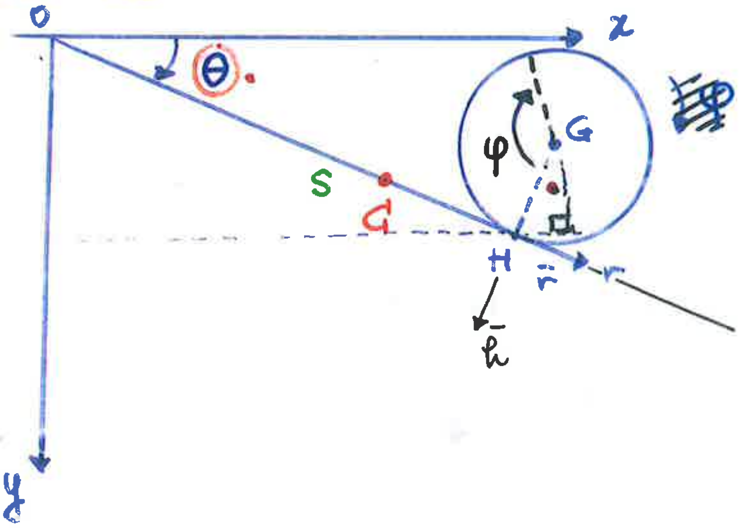
• $\bar{v}_G = (R-r)\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\bar{\imath} - \omega_D \bar{k} \times [r\sin\varphi\,\bar{\imath} - r\cos\varphi\,\bar{\jmath}]$

$= [(R-r)\cos\varphi\,\dot{\varphi} - \omega_D r\cos\varphi]\bar{\imath} - \omega_D r\sin\varphi\,\bar{\jmath}$

$$\begin{cases} 0 = (R-r)\cos\varphi\,\dot{\varphi} - \omega_D r\cos\varphi \Rightarrow \omega_D = \dfrac{R-r}{r}\dot{\varphi} \\ \text{oppure} \\ -(R-r)\sin\varphi\,\dot{\varphi} = -\omega_D r\sin\varphi \Rightarrow \boxed{\omega_D = \dfrac{R-r}{r}\dot{\varphi}} \end{cases}$$

Se $R = 3r \Rightarrow \omega_D = 2\dot{\varphi}$

39 **Esercizio**: Dato un disco che rotola senza strisciare lungo una guida rettilinea che ruota attorno al punto fisso O del rif. cart. Oxy, calcolare la velocità del centro del disco. (il sistema disco + guida giace su Oxy).



Nell'ipotesi che le velocità angolari della guida e del disco siano COSTANTI determinare il centro di istantanea rotazione del disco e l'equazione della base.

$$\bar\omega_{ass} = \dot\theta \bar k + \dot\varphi \bar k = (\dot\theta + \dot\varphi)\bar k = \bar\omega_r + \bar\omega_\tau$$

- col teorema di composizione delle velocità per corpi rigidi:

$$\bar v_G = \bar v_{H'} + \bar\omega_{ass} \times (G - H') \qquad H' \in D \quad H'' \in r$$

e $\bar v_{H'} \equiv \bar v_{H''} = s\dot\theta \bar h$ ma poiché il disco rotola s.s. su Or si ha che $\boxed{s = R\varphi}$

$$\bar v_G = R\varphi\dot\theta \bar h + (\dot\theta + \dot\varphi)\bar k \times (-R)\bar h =$$
$$= R\varphi\dot\theta \bar h + R(\dot\theta + \dot\varphi)\bar r$$

$$v_G^2 = R^2\left[\varphi^2\dot\theta^2 + (\dot\theta + \dot\varphi)^2\right]$$

- metodo cartesiano

$$\begin{cases} x_G = x_H + R\,\text{sen}\,\theta = s\cos\theta + R\,\text{sen}\,\theta = R\varphi\cos\theta + R\,\text{sen}\,\theta \\ y_G = y_H - R\cos\theta = s\,\text{sen}\,\theta - R\cos\theta = R\varphi\,\text{sen}\,\theta - R\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot x_G = R\dot\varphi\cos\theta - R\varphi\,\text{sen}\,\theta\,\dot\theta + R\cos\theta\,\dot\theta \\ \dot y_G = R\dot\varphi\,\text{sen}\,\theta + R\varphi\cos\theta\,\dot\theta + R\,\text{sen}\,\theta\,\dot\theta \end{cases}$$

$$v_G^2 = R^2\dot\varphi^2 + R^2\varphi^2\dot\theta^2 + R^2\dot\theta^2 + 2R^2\dot\varphi\dot\theta = R^2\left[\varphi^2\dot\theta^2 + (\dot\theta+\dot\varphi)^2\right]$$

Supponiamo ora $\dot\theta = \text{costante} = \Omega \rightarrow \theta = \Omega t \quad (t=0\ \theta_0=0)$

$\dot\varphi = \text{costante} = \omega \Rightarrow \varphi = \omega t \quad (t=0\ \varphi_0=0)$

Per il teorema di Chasles il centro di istantanea rotazione

$C \in Or$ poichè Or è $\perp$ a $\bar v_{H''} = \bar v_{H'}$.

$\overline{CO} = s_c$

- $\bar v_G = \underset{\overset{|||}{\bar 0}}{\bar v_C} + \bar\omega_{ass} \times (G-C) = (\Omega+\omega)\bar k \times [(G-H)+(H-C)]$

$$= (\Omega+\omega)\bar k \times [(-R)\bar h + (R\varphi - s_c)\bar r]$$

$$= R(\Omega+\omega)\bar r + (R\varphi - s_c)(\Omega+\omega)\bar h$$

- $\bar v_G = R\varphi\Omega\,\bar h + R(\Omega+\omega)\bar r$

da cui ricavo: $(R\varphi - s_c)(\Omega+\omega) = R\varphi\Omega$

cioè $$s_c = \frac{R\varphi\omega}{(\omega+\Omega)} = \frac{R\omega^2}{(\omega+\Omega)}t = \frac{R\omega^2\,\theta}{\Omega(\omega+\Omega)} \qquad t = \frac{\theta}{\Omega}$$

ma $\varphi = \omega t = \frac{\omega}{\Omega}\theta$

$$\begin{cases} x_c = s_c\cos\theta \\ y_c = s_c\operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad x^2+y^2 = s_c^2 = \frac{R^2\omega^4}{\Omega^2(\omega+\Omega)^2}\theta^2$$

~~circonferenza~~

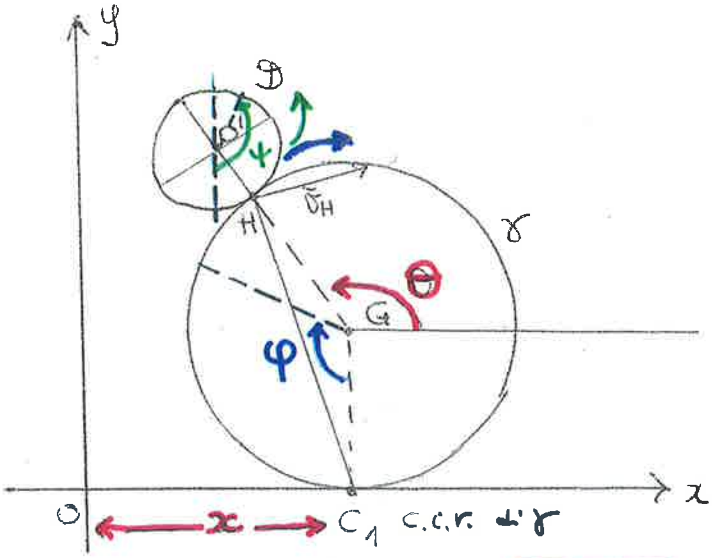
ma $x^2+y^2=\rho^2$ in coord. polari

$$\boxed{\rho = \frac{R\omega^2}{\Omega(\omega+\Omega)}\theta}$$

traiettoria polare della base.

Spirale

Disco che rotola su γ che rotola senza strisciare su Ox.

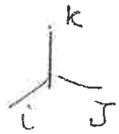


γ: [redacted], R r.s.s. su Ox

$\mathcal{D}$: [redacted], r r.s.s. su γ.

$$\begin{cases} q_1 = x_G = x \in \mathbb{R} \\ q_2 = \theta \in (0, 2\pi) \end{cases}$$

$t=0 \quad x(0)=0 \quad \theta(0)=0$



γ: $\exists \varphi$ $\quad \vec{\omega}_\gamma = -\dot{\varphi}\,\vec{k} \quad \Rightarrow \boxed{\dot{x} = R\dot{\varphi}} \Rightarrow \vec{\omega}_\gamma = -\frac{\dot{x}}{R}\vec{k}$

$\mathcal{D}$: $\exists \psi$: $\quad \vec{\omega}_D = \dot{\psi}\,\vec{k}$ $\quad$ trovare il legame tra ψ, x, θ. $\Rightarrow$ 2 g. di l.

$$\begin{cases} \vec{v}_{O'} = \vec{v}_{H'} + \vec{\omega}_D \times (O' - H') & H' \in \mathcal{D} \\ \vec{v}_{H'} = \vec{v}_{H''} \quad \text{r.s.s.} & H'' \in \gamma \\ \vec{v}_{H''} = \underset{=\vec{0}}{\vec{v}_{C_1}} + \vec{\omega}_\gamma \times (H'' - C_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{O'} = \vec{\omega}_\gamma \times (H'' - C_1) + \vec{\omega}_D \times (O' - H')$$

$$= -\frac{\dot{x}}{R}\vec{k} \times \left[(x_H - x_{C_1})\vec{i} + (y_H)\vec{j}\right] + \dot{\psi}\,\vec{k} \times \left[(x_{O'} - x_H)\vec{i} + (y_{O'} - y_H)\vec{j}\right]$$

$$= -\frac{\dot{x}}{R}\left[(x_H - x_{C_1})\vec{j} - y_H\vec{i}\right] + \dot{\psi}\left[(x_{O'} - x_H)\vec{j} - (y_{O'} - y_H)\vec{i}\right]$$

$C_1\,(x, 0) \qquad x_{C_1} = x_G = x$

$H\,(x - R\cos(\pi - \theta);\ R + R\sin(\pi - \theta)) = (x + R\cos\theta,\ R + R\sin\theta)$

$O'\,(x + (R+r)\cos\theta;\ R + (R+r)\sin\theta)$

$\downarrow$

- $\vec{v}_{O'} = (\dot{x} - (R+r)\sin\theta\,\dot{\theta},\ (R+r)\cos\theta\,\dot{\theta})$

$$\vec{v}_{O'} = +\frac{\dot{x}}{R}\left[R(1+\sin\theta)\vec{i} - R\cos\theta\,\vec{j}\right] + \dot{\psi}\left[-(r\sin\theta)\vec{i} + r\cos\theta\,\vec{j}\right]$$

- $\vec{v}_{O'} = \left[\dot{x}(1+\sin\theta) - r\dot{\psi}\sin\theta\right]\vec{i} + \left[-\dot{x}\cos\theta + r\dot{\psi}\cos\theta\right]\vec{j}$

uguagliando:

$\cancel{\dot{x}} - (R+r)\sin\theta\,\dot{\theta} = \cancel{\dot{x}} + \dot{x}\sin\theta - r\dot{\psi}\sin\theta$ $\quad$ in fase di moto $\sin\theta \neq 0$

$-(R+r)\dot{\theta} = \dot{x} - r\dot{\psi} \quad \Rightarrow \boxed{\dot{\psi} = \frac{\dot{x} + (R+r)\dot{\theta}}{r}}$

ii) Per Chasles è C.I.R. di $\mathcal{D}$ $\in$ retta C_1H.

$$\bar{V}_{O'} = \bar{\omega}_D \times (O'-C) = \dot{\varphi}\,\bar{k} \times [(x_{O'}-x_C)\bar{\imath} + (y_{O'}-y_C)\bar{\jmath}]$$

$$\dot{x}_{O'}\,\bar{\imath} + \dot{y}_{O'}\,\bar{\jmath} = \dot{\varphi}(x_{O'}-x_C)\bar{\jmath} - \dot{\varphi}(y_{O'}-y_C)\bar{\imath}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{O'} = -\dot{\varphi}(y_{O'}-y_C) \\ \dot{y}_{O'} = \dot{\varphi}(x_{O'}-x_C) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_{O'} = -y_{O'}\dot{\varphi} + \dot{\varphi}\,y_C \\ \dot{y}_{O'} = x_{O'}\dot{\varphi} - \dot{\varphi}\,x_C \end{cases}$$

$$y_C = \frac{+\dot{x}_{O'} + \dot{\varphi}\,y_{O'}}{\dot{\varphi}} = y_{O'} + \frac{\dot{x}_{O'}}{\dot{\varphi}} = y_{O'} + \frac{\dot{x}_{O'}\,r}{\dot{x} + (R+r)\dot{\theta}}$$

$$x_C = \frac{\dot{\varphi}\,x_{O'} - \dot{y}_{O'}}{\dot{\varphi}} = x_{O'} - \frac{\dot{y}_{O'}}{\dot{\varphi}} = x_{O'} - \frac{\dot{y}_{O'}\,r}{\dot{x} + (R+r)\dot{\theta}}$$