DINAMICA DEL PUNTO MAT.

Abbiamo visto che in generale:

$$\vec{F} = \hat{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$$

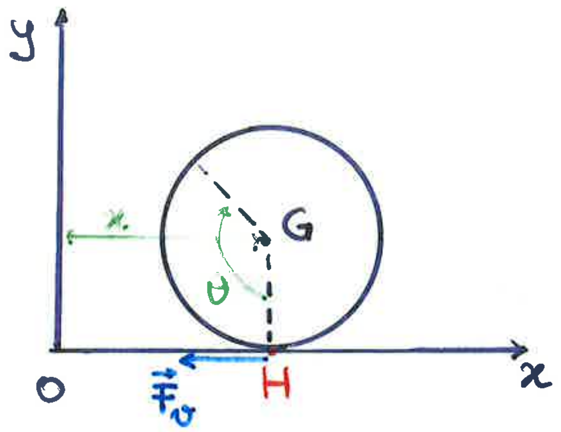
se $\vec{F} = \hat{F}(\vec{x})$ la forza è detta posizionale.

Tra le forze del tipo $\vec{F} = \hat{F}(\dot{\vec{x}})$ abbiamo visto:

la forza viscosa $\vec{F} = -h\vec{v}$, $h > 0$

la forza idraulica $\vec{F} = -\lambda v \vec{v}$, $\lambda > 0$

Esempio: Dato un disco di massa m e raggio R che rotola e striscia sull'asse Ox di un rif. verticale Oxy, determinare l'espressione della forza viscosa $\vec{F}_H$ applicata in H punto di contatto.



Il disco ha 2 g. di l.:

$$\begin{cases} q_1 = x_G \\ q_2 = \Theta \end{cases}$$

$$\vec{F}_H = -h\,\vec{v}_H$$

Dalla F.F.C. $\vec{v}_H = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times (H-G)$

$$\vec{v}_H = \dot{x}\,\vec{i} - \dot{\Theta}\,\vec{k} \times (-R)\vec{j} = (\dot{x} - R\dot{\Theta})\,\vec{i}$$

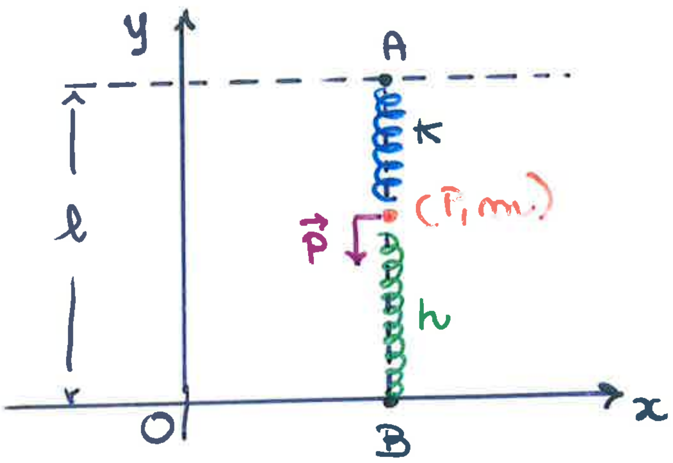
$$\vec{F}_H = -h(\dot{x} - R\dot{\Theta})\,\vec{i}$$

__Esercizio__: Dato un punto mat. pesante (P, m) mobile nel piano Oxy soggetto a due forze di tipo elastico: $\vec{F}_1(P) = -k(P-A)$, $\vec{F}_2(P) = -h(P-B)$ (con $k, h > 0$) dove $A(x_0, \ell)$ e $B(x_0, 0)$.

Determinare:

i) il moto di (P, m).

ii) le posizioni di equilibrio di (P, m).



$P(x_0, y)$ $\quad q = y \in [0, \ell]$

$$\vec{F}_1 = -k(y-\ell)\vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = -hy\vec{j}$$

$$\vec{p} = m\vec{g} = -mg\vec{j}$$

L'eq. vettoriale del moto:

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{p}$$

proiettata su Oy:

$$m\ddot{y} = -k(y-\ell) - hy - mg$$

$$= -(k+h)y + k\ell - mg$$

Posto $\dfrac{k+h}{m} = \omega^2$ otteniamo:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{k\ell - mg}{m}$$

la cui soluzione è nota, dopo aver assegnato le condizioni iniziali.

Supponiamo che per $t=0$ $v_0=0$ e $P\equiv O$

quindi si ha $\begin{cases} y(0)=0 \\ \dot{y}(0)=0 \end{cases}$

$$y(t) = y_0(t) + y_P(t) = \underbrace{A\cos(\omega t+\gamma)}_{y_0} + \underbrace{\frac{(k\ell - mg)}{m\omega^2}}_{y_P}$$

$$0 = y(0) = A\cos\gamma + \frac{(k\ell-mg)}{m\omega^2}$$

$$\dot{y}(t) = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t+\gamma)$$

$$0 = \dot{y}(0) = -A\omega\,\mathrm{sen}\,\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \text{ o } \gamma=\pi$$

Scelto $\gamma = 0$ $\Rightarrow$ $A = -\dfrac{(k\ell-mg)}{m\omega^2}$

quindi

$$\boxed{y(t) = \frac{(k\ell-mg)}{m\omega^2}(1-\cos\omega t)}$$ moto

Per determinare le posizioni di equilibrio:

$$\vec{F}(x_e, 0, t) = \vec{0}$$

cioè:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\vec{g} = \vec{0}$$

$$-k(y-\ell) - hy - mg = 0$$

$$y_e = \frac{k\ell - mg}{k+h} = \frac{k\ell-mg}{m\omega^2}$$ p. di equilibrio

$y_e \in [0, \ell)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{mg}{\ell} \leq k \leq \dfrac{m}{\ell}(g+\omega^2\ell)$

Osservazione

Se inizialmente $\begin{cases} y(0) = y_e \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = y_e \quad \forall t > 0$

per def. di p. di equilibrio.

Infatti se $y(0) = y_e \Rightarrow A\cos\gamma = 0$

$\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow -A\omega \operatorname{sen}\gamma = 0$ $\Rightarrow A \equiv 0$

e quindi $y(t) \equiv y_e$.

Dall' eq. diff. di moto, determinato y_e si ha:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \omega^2 y_e$$

cioè

$$\ddot{y} + \omega^2 (y - y_e) = 0$$

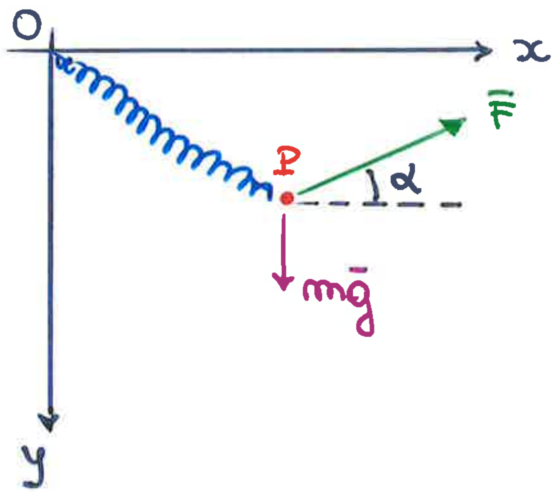
Se inizialmente $\begin{cases} y(0) = y_e \\ \dot{y}(0) = \underline{\underline{v_0}} \neq 0 \end{cases}$

$$\boxed{y(t) = \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t}$$ moto

Esercizio In un piano verticale Oxy si consideri un punto mat. pesante (P, m) soggetto alla forza elastica $\vec{F}_p = -k(P-O)$ $(k>0)$ e ad una forza costante $\vec{F}$ che forma un angolo $\alpha = \pi/6$ con l'orizzontale (vedi figura). Determinare:

i) le posizioni di equilibrio di (P, m)

ii) l'intensità della forza $\vec{F}$ affinchè siano posizioni di equilibrio per P quelle corrispondenti a $|\vec{OP}| = mg/k$.



$P(x, y)$ $\quad \begin{matrix} q_1 = x \\ q_2 = y \end{matrix} \in \mathbb{R}$

$\vec{p} = m\vec{g} = mg\,\vec{j}$

$\vec{F}_p = -k(P-O) = -kx\,\vec{i} - ky\,\vec{j}$

$\vec{F} = F\frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{i} - F\cdot\frac{1}{2}\,\vec{j}$

① Utilizzando $\vec{\mathcal{F}}(x_e, 0, t) = \vec{0}$

$$m\vec{g} - k(P-O) + \vec{F} = \vec{0}$$

proiettato sugli assi del riferimento:

$$\begin{cases} -kx + F\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \\ -ky + mg - \frac{F}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_e = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{F}{k} \\ y_e = \frac{2mg - F}{2k} \end{cases}$$

p. di equilibrio

2) Poiché le forze sono conservative $\Rightarrow \exists\ \mathcal{U}$ potenziale : $\vec{\mathcal{F}} = \text{grad}\,\mathcal{U}$.

$$\mathcal{U}_T = \mathcal{U}_{peso} + \mathcal{U}_{molla} + \mathcal{U}_F$$

$$\mathcal{U}_{peso} = mgy + c$$

$$\mathcal{U}_{molla} = -\frac{1}{2}k\underbrace{(x^2+y^2)}_{|P-O|^2} + c$$

$$\mathcal{U}_F = ?$$

$$dL = \vec{F}\cdot dP = F_x\,dx + F_y\,dy = \frac{\sqrt{3}}{2}F\,dx - \frac{F}{2}\,dy$$

$$dL = d\mathcal{U}_F$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}_F}{\partial x} = F_x = \frac{\sqrt{3}}{2}F \quad e \quad \frac{\partial \mathcal{U}_F}{\partial y} = F_y = -\frac{F}{2}$$

Ma $\vec{\mathcal{F}}(x_e, 0, t) = \vec{0} \Rightarrow \text{grad}\,\mathcal{U}_T = 0$ cioè:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{U}_T}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{U}_T}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -kx + \dfrac{\sqrt{3}}{2}F = 0 \\ mg - ky - \dfrac{F}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_e, y_e) \text{ come prima.}$$

ii) $$\overline{OP}_e^{\,2} = x_e^2 + y_e^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{F}{k}\right)^2 + \left(\frac{2mg - F}{2k}\right)^2 = \frac{m^2g^2 + F^2 - mgF}{k^2}$$

se all'equilibrio $\overline{OP} = mg/k$

segue $F^2 - mgF = 0 \Rightarrow \begin{cases} F = 0 \\ F = mg \end{cases}$

per $F = 0$: $(x_e, y_e) = (0, mg/k)$

per $F = mg$: $(x_e, y_e) = (\sqrt{3}\,mg/2k,\ mg/2k)$.