DINAMICA E STATICA DEL PUNTO MATERIALE VINCOLATO

1) In un piano verticale Oxy si consideri un punto mat. pesante (P, m) vincolato bilateralmente ad una semi=circonferenza di centro O e raggio R, soggetto alla forza elastica $\vec{F}_e = -\underset{(>0)}{k}(P-A)$ dove $A = (-R, 0)$.

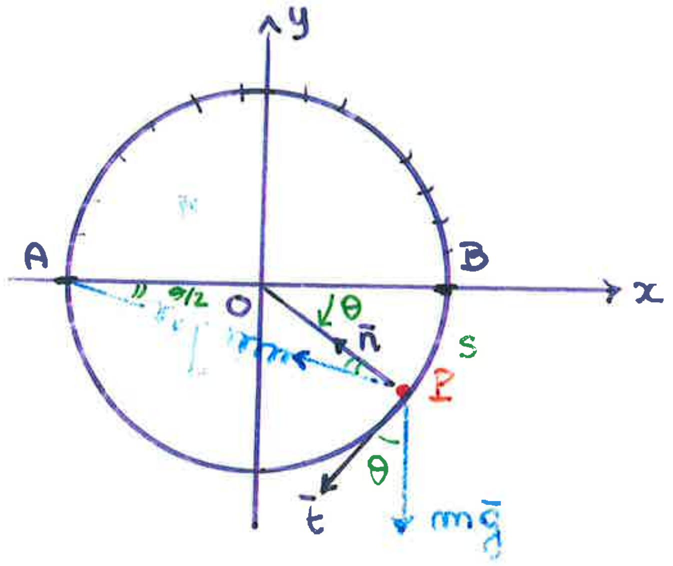
Determinare:

1) l'equazione del moto di P;
2) la reazione vincolare dinamica;
3) le posizioni di equilibrio di P;
4) la reazione vincolare statica;

a) supponendo il vincolo liscio.

~~b) in presenza di attrito~~.

Inoltre analizzare la stabilità delle posizioni di equilibrio determinate al punto 3a).



1 g. di libertà

$q = \theta \in [0, \pi]$

$\vec{F} = m\vec{g} - k(P-A)$ conservativa

vincolo fisso e liscio

$\vec{\phi} = \phi\,\vec{n}$ verso incognito moto di P i) $m\bar{a} = \bar{\mathcal{F}} + \bar{\phi} = m\bar{g} - k(P-A) + \bar{\phi}$

ii) $T+V=E$

i) • possiamo usare le coordinate cartesiane:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_P = F_x + \phi_x \\ m\ddot{y}_P = F_y + \phi_y \end{cases} \qquad \begin{cases} x_P = R\cos\theta \\ y_P = -R\,sen\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_P = -R\,sen\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y}_P = -R\cos\theta\,\dot{\theta} \end{cases}$$

$$mR(sen\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2) = -k(R\cos\theta + R) - \phi\cos\theta$$

$$mR(-\cos\theta\,\ddot{\theta} + sen\theta\,\dot{\theta}^2) = -k(-R\,sen\theta) - mg + \phi\,sen\theta$$

entrambe le equazioni contengono ϕ.
Ricaviamo per esempio ϕ dalla 1ª e sostituendola nella seconda otteniamo l'equazione pura del moto

• possiamo usare le coordinate intrinseche: $(P,\bar{t},\bar{n},\bar{b})$
In tale riferimento: $s = R\theta$

$$\begin{cases} m\ddot{s} = \mathcal{F}_t \\ m\dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = \mathcal{F}_n + \phi \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_t = \vec{F}\cdot\bar{t} = m\bar{g}\cdot\bar{t} - k(P-A)\cdot\bar{t}$$

$$\mathcal{F}_n = \vec{F}\cdot\bar{n} = m\bar{g}\cdot\bar{n} - k(P-A)\cdot\bar{n}$$

$$\overline{PA} = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2\cos(\pi-\theta)} = R\sqrt{2(1+\cos\theta)} = 2R\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\mathcal{F}_t = mg\cos\theta + k\cdot 2R\cos\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)$$
$$= mg\cos\theta + 2kR\cos\frac{\theta}{2}\,sen\frac{\theta}{2}$$
$$= mg\cos\theta + kR\,sen\,\theta$$

$$\mathcal{F}_m = mg\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + k\,2R\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$
$$= -mg\,\text{sen}\,\theta + k\,2R\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)$$
$$= -mg\,\text{sen}\,\theta + kR(1+\cos\theta)$$

pertanto:

$$mR\ddot{\theta} = mg\cos\theta + kR\,\text{sen}\,\theta \quad \text{eq. del moto}$$
$$mR\dot{\theta}^2 = -mg\,\text{sen}\,\theta + kR(1+\cos\theta) + \phi \quad \text{ricavo } \phi$$

In entrambe i metodi ottengo sia l'eq. del moto che la reazione vincolare dinamica in un istante generico t.

ii) Si può applicare la conservazione dell'energia.

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$
$$V = -\mathcal{U} \quad \text{dove} \quad \mathcal{U} = -mg\,y_P - \frac{1}{2}k\,\overline{PA}^2 + c$$
$$= mgR\,\text{sen}\,\theta - \frac{1}{2}k\,2R^2(1+\cos\theta) + c$$

perciò:

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mgR\,\text{sen}\,\theta + kR^2\cos\theta = E$$

Derivando rispetto al tempo t:

$$mR^2\cancel{\dot{\theta}}\,\ddot{\theta} - mgR\cos\theta\,\cancel{\dot{\theta}} - kR^2\,\text{sen}\,\theta\,\cancel{\dot{\theta}} = 0$$

$\dot{\theta} \neq 0$ in fase di moto otteniamo:

$$mR\ddot{\theta} = mg\cos\theta + kR\,\text{sen}\,\theta$$

equilibrio di P

Per determinare le posizioni di equilibrio di P possiamo procedere in 2 modi:

i) eq. della statica $\vec{\mathcal{F}} + \vec{\Phi} = \bar{0}$

ii) con la stazionarietà del potenziale poiché le forze sono conservative.

i) $m\bar{g} - k(P-A) + \bar{\Phi} = \bar{0}$

che può essere proiettato sugli assi del rif. Oxy oppure nel rif. $(P, \bar{t}, \bar{n}, \bar{b})$.

Nel secondo caso si ha:

$$\begin{cases} mg\cos\theta + kR\,\mathrm{sen}\theta = 0 \\ -mg\,\mathrm{sen}\theta + kR(1+\cos\theta) + \phi = 0 \end{cases}$$

da cui si ha:

$$\begin{cases} \phi = mg\,\mathrm{sen}\theta - kR(1+\cos\theta) \\ tg\theta = -mg/kR \qquad (*) \end{cases}$$

sono posizioni di equilibrio θ_e quelle che verificano (*

$$\begin{cases} \theta_{e_1} = \mathrm{arctg}(-mg/kR), \quad \theta_{e_2} = \theta_{e_1} + \pi \quad \notin I \\ \phi = mg\,\mathrm{sen}\theta_e - kR(1+\cos\theta_e) \end{cases}$$

In tal modo determino contemporaneamente le posizioni di equilibrio e la reazione vincolare statica.

ii) Poichè le forze sono conservative $\exists\, U : \nabla U = \bar{F}$

$$U = U_{peso} + U_{f.elastica} = -mgy_p - \frac{1}{2}k\,\overline{PA}^2 + c$$

$$U(\theta) = mgR\,\mathrm{sen}\theta - kR^2\cos\theta + c$$

$$\frac{dU}{d\theta} = mgR\cos\theta + kR^2\,\mathrm{sen}\theta = 0$$

$$\Rightarrow tg\theta = -mg/kR. \qquad \theta_e \in (\pi/2, \pi)$$

Nelle ipotesi di vincolo liscio e forze conservative, possiamo determinare quali tra le posizioni di equilibrio sono stabili e quali instabili.

Nel caso dei sistemi ad 1 grado di libertà, basta studiare il segno della derivata seconda del potenziale U (o dell' energia potenziale V).

<u>N.B.</u>: Data una funzione $y=f(x)$:

$f'(x)=0 \Rightarrow$ punti di stazionarietà $\begin{cases} \text{massimi} \\ \text{minimi} \\ \text{flessi} \end{cases}$

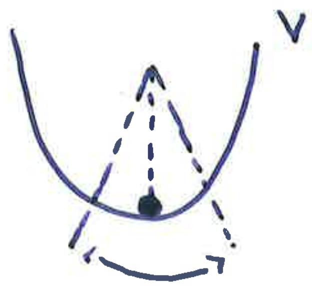
$$f''(x)\Big|_{x=x_e} \begin{cases} <0 & x_e \text{ massimo} \\ >0 & x_e \text{ minimo} \\ =0 & ? \end{cases}$$

$$? \Rightarrow f'''(x)\Big|_{x=x_e} \begin{cases} \neq 0 & x_e \text{ flesso} \\ =0 & ? \end{cases}$$

$? \Rightarrow f^{IV}(x)\Big|_{x=x_e}$ ha lo stesso comportamento di f''.

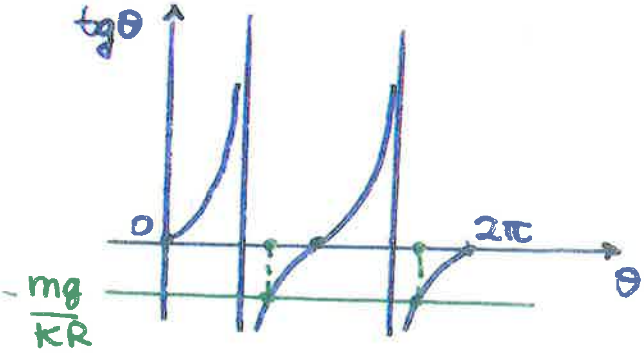
<u>I massimi stretti del potenziale U</u> (minimi stretti per V) <u>sono posizioni di equilibrio STABILE</u>.

Tutti gli altri punti sono posizioni di equilibrio INSTABILE.



BUCA DI ENERGIA POTENZIALE.

In questo esercizio:



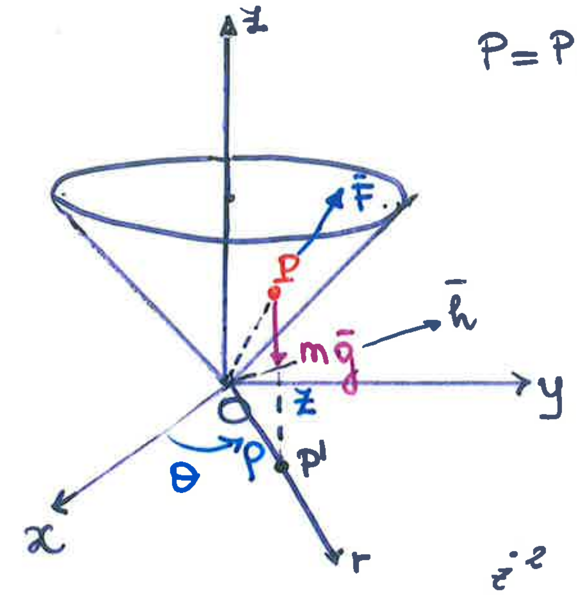
$$\frac{d^2 U}{d\theta^2} = -mgR\,\mathrm{sen}\theta + kR^2\cos\theta$$

$$= kR^2\cos\theta\left(1-\frac{mg}{kR}\,\mathrm{tg}\theta\right)$$

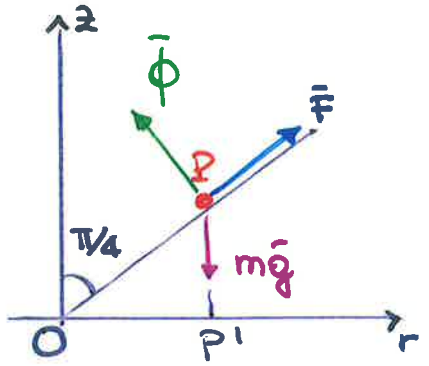
$$\left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta_e} = \frac{(k^2R^2+m^2g^2)}{k}\cos\theta_e \quad \begin{cases} \theta_{e_1} < 0 \Rightarrow \text{MAX} \quad \text{STABILE} \\ \theta_{e_2} > 0 \Rightarrow \text{MIN} \quad \text{INSTABILE} \end{cases}$$

(non acc. $\notin I$)

Esercizio: Dato un punto mat. pesante (P, m) vincolato a muoversi senza attrito all'interno di una superficie conica di semiapertura $\alpha = \pi/4$ soggetto ad una forza repulsiva $\vec{F}_P = \lambda(P-O)$, $\lambda > 0$. Determinare gli integrali primi di moto.



$P = P(\rho, \theta, z)$



$$(P-O) = (P-P') + (P'-O) = \rho\vec{r} + z\vec{k} \quad \text{ma } z = \rho$$

$$v_P^2 = \dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2 + \overset{\dot z^2}{\overset{\|}{\dot\rho^2}} = 2\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2$$

$$U = -mg\rho + \frac{1}{2}\lambda(\rho^2 + \rho^2) = \lambda\rho^2 - mg\rho$$

vale $T + V = E$

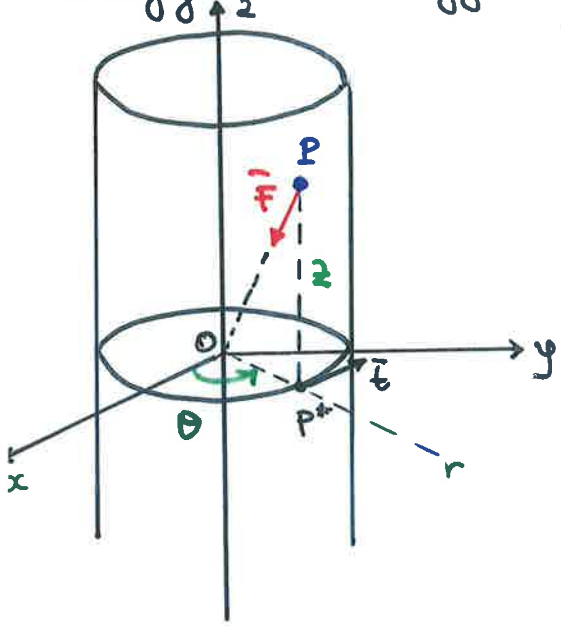
$$\frac{1}{2}m(2\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2) + mg\rho - \lambda\rho^2 = E$$ 1° integrale primo di moto

$\vec{F}, \vec{\phi} \in Orz$; detto $\vec{h}$ il versore ortogonale a tale piano proiettiamo l'eq. fondamentale della dinamica del punto vincolato su $\vec{h}$: $m\vec{a} \cdot \vec{h} = 0$

$m a_\theta = 0$ dove $a_\theta = \rho\ddot\theta + 2\dot\rho\dot\theta$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\rho^2\dot\theta) = 0 \Rightarrow \rho^2\dot\theta = c$ 2° int. primo di moto

Moto di un punto mat. (P, m) vincolato ad una sup. cilindrica di raggio R e soggetto alla forza elastica $\bar{F} = -k(P-O)$.

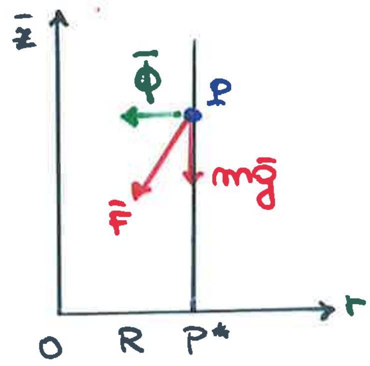


$q_1 = \theta \in [0, 2\pi)$

$q_2 = z \in \mathbb{R}$

$P(R\cos\theta, R\sin\theta, z)$

$x^2 + y^2 = R^2$ sup. cilindrica.



Forze attive: molla, peso sono conservative

$$\Rightarrow \exists\, U = -mgz - \frac{1}{2}k\overline{PO}^2 + c$$

$$= -mgz - \frac{1}{2}k(R^2 + z^2) + c$$

$$T = \frac{1}{2} m v_P^2$$

$$\bar{v}_P = R\dot{\theta}\,\vec{t} + \dot{z}\,\bar{k} \quad \Rightarrow v_P^2 = R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2$$

Vale $T + V = E$

$$\frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}k(z^2 + R^2) + mgz = E$$

1° integrale primo di moto

Da

$$m\bar{a} = m\bar{g} - k(P-O) + \bar{\Phi}$$

moltiplico ambo i membri vettorialmente per $(O-P)$

$$m\bar{a}_P \times (O-P) = m\bar{g} \times (O-P) - \underbrace{k(P-O)\times(O-P)}_{\equiv \bar{0}} + \bar{\Phi}\times(O-P)$$

e poi moltiplico scalarmente per $\bar{k}$ (versore asse z).

$$m\bar{a}_P \times (O-P)\cdot\bar{k} = \underbrace{m\bar{g}\times(O-P)}_{\perp\, Orz}\cdot\bar{k} + \underbrace{\bar{\Phi}\times(O-P)}_{\perp\, Orz}\cdot\bar{k} \equiv 0$$

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} \times (O-P) \cdot \bar{k} = \left\{ m \frac{d}{dt}\left[\bar{v}\times(O-P)\right]\right\}\cdot\bar{k} - \left\{ m\,\bar{v}\times\frac{d}{dt}(O-P)\right\}\cdot\bar{k}$$

$$= \frac{d}{dt}(m\bar{v}\times(O-P))\cdot\bar{k} + m(\underbrace{\bar{v}\times\bar{v}}_{\equiv 0})\cdot\bar{k}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[(m\bar{v}\times(O-P))\cdot\bar{k}\right]$$

$$\Rightarrow \quad m\bar{v}\times(O-P)\cdot\bar{k} = \text{cost}$$

$$m\left[(-R\sin\theta\,\dot{\theta}\,\bar{i} + R\cos\theta\,\dot{\theta}\,\bar{j} + \dot{z}\,\bar{k})\times(-R\cos\theta\,\bar{i} + R\sin\theta\,\bar{j} - z\bar{k})\right]\cdot\bar{k}$$

$$= m\left(R^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}\,\bar{k} - Rz\sin\theta\dot{\theta}\bar{j} + R\cos^2\theta\,\dot{\theta}\,\bar{k} - R\cos\theta\, z\dot{\theta}\bar{i} - \right.$$

$$\left. - R\cos\theta\,\dot{z}\,\bar{j} + R\sin\theta\,\dot{z}\,\bar{i}\right)\cdot\bar{k}$$

$$= mR^2\dot{\theta}$$

$mR^2\dot{\theta} = \text{cost}$ 2° integrale primo di moto (velocità areale cost.)

$\Downarrow$

$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_0 \quad \forall t > 0 \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \dot{\theta}_0 t + \theta_0$

Derivo $T + V = E$

$$\frac{1}{\cancel{2}} m\left(R^2 \cancel{2}\dot{\theta}\ddot{\theta} + \cancel{2}\dot{z}\ddot{z}\right) + \frac{1}{\cancel{2}}k(\cancel{2}z\dot{z}) + mg\dot{z} = 0$$

in fase di moto $\dot{z} \neq 0$ e inoltre $\ddot{\theta}(t) \equiv 0$

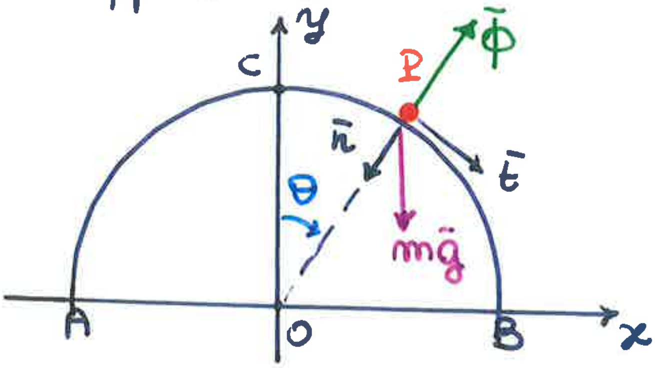
$$m\ddot{z} + kz + mg = 0$$

$\ddot{z} + \omega^2 z = -g \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$ moto armonico su Oz.

$$z(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \gamma\right) - g/\omega^2$$

con A e γ determinate con le c.i.

Esercizio 4 Dato un punto mat. pesante (P,m) vincolato a muoversi su una semicirconferenza fissa in un piano verticale Oxy, determinare il distacco di P supponendo il vincolo liscio e che per $t=0$ $P\equiv C$



e $\bar{v}_P(0) = v_0\,\bar{i}$.

$q=\theta \qquad \theta \in [0, \theta_d)$

$s = R\theta$ ↓distacco

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{\phi}$$

Proiettata su $\bar{t}, \bar{n}$:

$$\begin{cases} mR\ddot{\theta} = mg \,\mathrm{sen}\theta \\ mR\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} - g/R \,\mathrm{sen}\theta = 0 & \text{eq. del moto non lineare} \\ \phi = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2 & \text{reazione vinc. din} \end{cases}$$

Vincolo liscio e fisso, forze attive conservative.

Vale $\underline{T+V=E}$ $\qquad E = T_0 + V_0$

$$\frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgR$$

dove $\begin{cases} v_0 = R\dot{\theta}_0 \\ \theta_0 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_0^2 + 2\,g/R\,(1-\cos\theta)$$

sostituita in ϕ si ottiene:

$$\phi = mg\,(3\cos\theta - 2) - mR\dot{\theta}_0^2$$

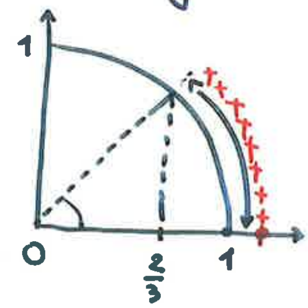
La semicirconferenza offre effettivo appoggio fino a che $\phi > 0$.

Quando $\theta = \theta_d$ (da determinare) $\phi = 0$ e vic.

Allora $\cos\theta = \frac{2}{3} + \frac{R}{3g}\dot{\theta}_0^2 \Rightarrow \theta_d = \arccos\left(\frac{2}{3} + \frac{R}{3g}\dot{\theta}_0^2\right)$

poichè $\dot{\theta}_0^2 > 0 \quad \cos\theta_d > \frac{2}{3}$

poichè $\cos\theta \leq 1 \quad \dot{\theta}_0^2 \leq g/R$.



$\frac{2}{3} < \cos\theta_d \leq 1$

Supponiamo che $\dot{\theta}_0^2 = \frac{(3\sqrt{3}-4)}{2}\, g/R$

$$\cos\theta = \frac{2}{3} + \frac{3\sqrt{3}-4}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta_d = \pi/6.$$