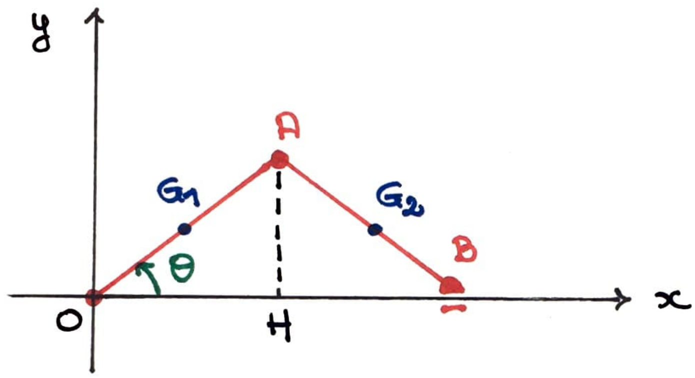
QUANTITÀ MECCANICHE

1) Calcolare la quantità di moto $\vec{Q}$, il momento delle quantità $\vec{K}_O$ rispetto al polo O e l'energia cinetica T del sistema articolato in figura costituito da:



asta omogenea $\overline{OA}$: m, ℓ

asta omogenea $\overline{AB}$: m, ℓ

punto materiale (B, M)

OA e AB incernierate in A

OA incernierata in O.

B scorrevole su Ox

(B, M) saldato in B.

Vincoli fissi, lisci, forze attive conservative (peso)

Gradi di libertà: 1 $\Rightarrow q = A\hat{O}B = \theta \in [0, 2\pi)$

$\vec{\omega}_{OA} = +\dot{\theta}\,\vec{k}$

$\vec{\omega}_{AB} = -\dot{\theta}\,\vec{k}$

- $\vec{Q} = m_0 \vec{v}_g = m\vec{v}_{G_1} + m\vec{v}_{G_2} + M\vec{v}_B$

segue dalla proprietà additiva del baricentro (derivata rispetto al tempo)

$G_1\left(\frac{\ell}{2}\cos\theta, \frac{\ell}{2}\sin\theta\right)$

$G_2\left(\frac{3}{2}\ell\cos\theta, \frac{\ell}{2}\sin\theta\right)$

$B\left(2\ell\cos\theta, 0\right)$

$\bar{v}_{G_1} = \left(-\frac{\ell}{2}\sin\theta\,\dot{\theta},\ \frac{\ell}{2}\cos\theta\,\dot{\theta}\right)$

$\bar{v}_{G_2} = \left(-\frac{3}{2}\ell\sin\theta\,\dot{\theta},\ \frac{\ell}{2}\cos\theta\,\dot{\theta}\right)$

$\bar{v}_B = \left(-2\ell\sin\theta\,\dot{\theta},\ 0\right)$

- $\vec{Q} = -2(m+M)\ell\sin\theta\,\dot{\theta}\,\bar{\imath} + m\ell\cos\theta\,\dot{\theta}\,\bar{\jmath}$

- $\bar{K}_O = \bar{K}_O(OA) + \bar{K}_O(AB) + \bar{K}_O(B)$

Il sistema è piano $\Rightarrow$ $\vec{K}_O = K_{Oz}\,\vec{k}$

- $K_{Oz}(OA) = I^{O}_{33}(OA)\,\omega_{OA} = \frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta}$ O pto fisso di OA

- $K_{Oz}(AB) = [\bar{K}'_{G_2} + m\bar{v}_{G_2}\times(O-G_2)]\cdot\vec{k}$ AB non ha pti fissi

$$= m\begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \dot{x}_{G_2} & \dot{y}_{G_2} & 0 \\ -x_{G_2} & -y_{G_2} & 0 \end{vmatrix}\cdot\vec{k} + I^{G_2}_{33}(AB)\,\bar{\omega}_{AB}\cdot\bar{k}$$

$$= m\left(x_{G_2}\dot{y}_{G_2} - \dot{x}_{G_2}y_{G_2}\right) - \frac{m\ell^2}{12}\dot{\theta}$$

$$\frac{3}{2}\ell\cos\theta\cdot\frac{\ell}{2}\cos\theta\,\dot{\theta} + \frac{3}{2}\ell\sin\theta\,\dot{\theta}\cdot\frac{\ell}{2}\sin\theta = \frac{3}{4}\ell^2\dot{\theta}$$

$$= \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\theta}$$

- $K_{Oz}(B) = [\underbrace{m\bar{v}_B\times(O-B)}_{\equiv\,\bar{0}\text{ perchè } //}]\cdot\bar{k} \equiv 0$

- $\vec{K}_O = m\ell^2\dot{\theta}\,\vec{k}$

$$T = T_{OA} + T_{AB} + T_B$$

- $T_{OA} = \frac{1}{2} I_{33}(OA)\, \omega_{OA}^2 = \frac{1}{2} \frac{m\ell^2}{3} \dot{\theta}^2$

- $T_{AB} = \frac{1}{2} m v_{G_2}^2 + T'$ dove $T' = \frac{1}{2} I_{33}^{G_2} \omega_{AB}^2 = \frac{1}{2} \frac{m l^2}{12} \dot{\theta}^2$

$$v_{G_2}^2 = \frac{9}{4} \ell^2 \sin^2\theta\, \dot{\theta}^2 + \frac{\ell^2}{4} \cos^2\theta\, \dot{\theta}^2 = \frac{\ell^2}{4}(1 + 8\sin^2\theta)\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow T_{AB} = \frac{1}{2} \frac{m\ell^2}{4}(1+8\sin^2\theta)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{m l^2}{12}\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m\ell^2}{3}(1+6\sin^2\theta)\dot{\theta}^2$$

- $T_B = \frac{1}{2} M |\bar{v}_B|^2 = \frac{1}{2} M \, 4\ell^2 \sin^2\theta\, \dot{\theta}^2$

- $\underline{T} = \left[\frac{m\ell^2}{3}(1+3\sin^2\theta) + 2M\ell^2\sin^2\theta\right]\dot{\theta}^2$

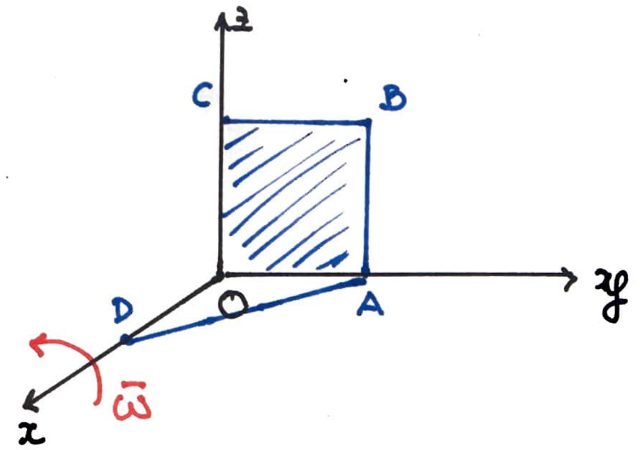
$$= \underline{\left[\frac{m}{3} + (m+2M)\sin^2\theta\right]\ell^2\dot{\theta}^2}$$

N.B: l'asta OA ha un punto fisso (cioè O)

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} I_{Oz}^{OA} \omega^2 = \frac{1}{2} I_{33}^{O} \omega^2$$

l'asta AB non ha punti fissi $\Rightarrow$ devo usare le teorema di König.

2) Calcolare il momento della quantità di moto $\vec{K}_O$ del sistema in figura, uniformemente rotante con velocità angolare $\vec{\omega}$ attorno all'asse Ox.



- Lamina quadrata omogenea OABC, di massa m e lato ℓ
- asta omogenea AD, di massa m e lunghezza $\ell\sqrt{2}$.

lamina ed asta saldate in modo da formare un C.R.

$$\vec{K}_O = \underset{\sim}{I}_O \bar{\omega} \quad \text{con } \bar{\omega} = (\omega, 0, 0)$$

$$\underset{\sim}{I}_O = \underset{\sim}{I}_O^{Q} + \underset{\sim}{I}_O^{AD}$$

OABC $\in$ piano Oyz.

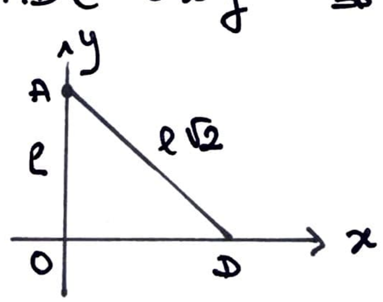
$$I_{22} = I_{33} = \frac{1}{3} m\ell^2 \Rightarrow I_{11} = \frac{2}{3} m\ell^2$$

$$I_{12} = I_{13} = 0$$

$$I_{23} = -m\frac{\ell^2}{4}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{I}_O^{Q} = m\ell^2 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$\overline{AD} \in Oxy \Rightarrow \overline{OD} = \ell \Rightarrow O\hat{A}D = O\hat{D}A = \pi/4.$



$$I_{11} = I_{22} = \frac{1}{3} m (\sqrt{2} l)^2 \sin^2 \pi/4 = \frac{1}{3} m \, 2 l^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{m l^2}{3}$$

$$I_{33} = \frac{2}{3} m l^2$$

$$I_{13} = I_{23} = 0$$

$$I_{12} = -\int_F \rho x y \, dF = -\int_0^{l\sqrt{2}} \frac{m}{l\sqrt{2}} \, s \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2} l - s) \frac{\sqrt{2}}{2} \, ds$$

$$= -\frac{m}{\sqrt{2} l} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{l\sqrt{2}} (\sqrt{2} l s - s^2) \, ds$$

$$= -\frac{m}{2\sqrt{2} l} \cdot \left(\sqrt{2} l \cdot \frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{3} s^3 \right)_0^{\sqrt{2} l}$$

$$= -\frac{m}{2\cancel{\sqrt{2} l}} \left(\cancel{\sqrt{2} l} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} l^2 - \frac{1}{3} 2 l^2 \cdot \cancel{\sqrt{2} l} \right)$$

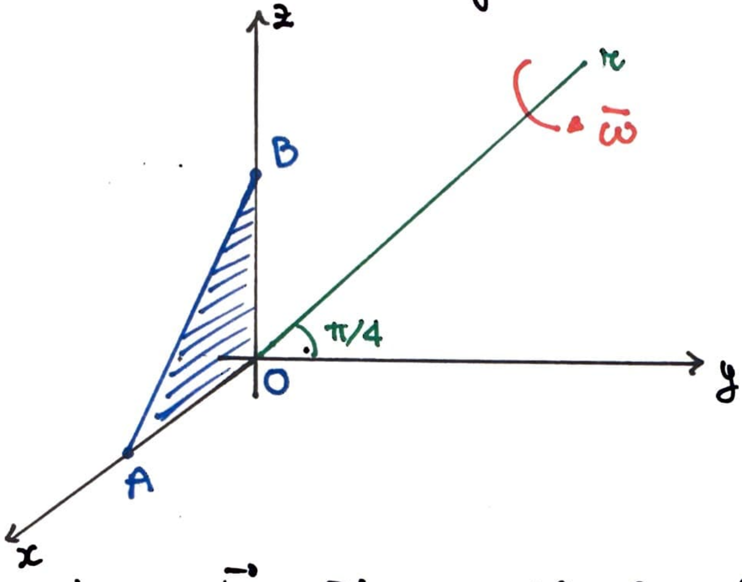
$$= -\frac{m}{2} \cdot \frac{1}{3} l^2 = -\frac{m l^2}{6}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{I}_O^{AD} = m l^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{I}_O^{TOT} = m l^2 \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

- $\bar{K}_O = \underset{\sim}{I}_O \bar{\omega} = m l^2 (\omega \bar{i} - \frac{1}{6} \omega \bar{j}) = m l^2 \omega (\bar{i} - \frac{1}{6} \bar{j})$
- l'asse Ox non è asse principale d'inerzia per il sistema, ma solo per la lamina
- l'asse Oz non è principale d'inerzia per il sistema, ma solo per l'asta AD.

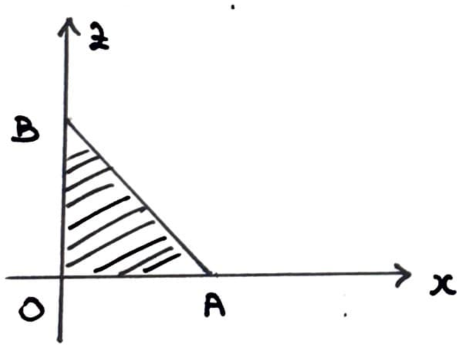
3) Calcolare il momento assiale della quantità di moto K_r del sistema in figura posto in rotazione uniforme con velocità angolare $\bar{\omega}$ attorno alla retta r.



• lamina a forma di triangolo rettangolo isoscele, omogeneo, di massa m e cateti L, appartenente al piano Oxz.

$$K_r = \vec{K}_O \cdot \vec{r}' \qquad \vec{r}' = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\bar{K}_O = \underset{\sim}{I}_O \, \bar{\omega} \qquad \bar{\omega} = \omega \frac{\sqrt{2}}{2} (0, 1, 1)$$



$$I_{11} = I_{33} = \frac{mL^2}{6}$$

$$I_{22} = \frac{mL^2}{3}$$

$$I_{13} = -\frac{mL^2}{12} \text{ (vedi calcoli matrici d'inerzia)}$$

$$\underset{\sim}{I}_O = mL^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}_O = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(m\ell^2 \cdot \omega \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= m\ell^2 \omega \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{1}{12} \bar{\imath} + \frac{1}{3} \bar{\jmath} + \frac{1}{6} \bar{k} \right)$$

- $K_r = m\ell^2\omega \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{1}{12} \bar{\imath} + \frac{1}{3} \bar{\jmath} + \frac{1}{6} \bar{k} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \bar{\jmath} + \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{k} \right)$

$$= m\ell^2 \frac{\omega}{2} \left(-\frac{1}{12} \bar{\imath} + \frac{1}{3} \bar{\jmath} + \frac{1}{6} \bar{k} \right) \cdot \left(\bar{\jmath} + \bar{k} \right)$$

$$= m\ell^2 \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{3} \bar{\jmath} \cdot \bar{\jmath} + \frac{1}{6} \bar{k} \cdot \bar{k} \right) = \underline{\frac{m\omega\ell^2}{4}}$$

- Se la lamina viene posta in rotazione attorno all'asse Oy

$\Rightarrow \bar{\omega} = \omega \bar{\jmath}$ (costante)

$$\Rightarrow \bar{K}_O = \underset{\sim}{I}_O \bar{\omega} = m\ell^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix}$$

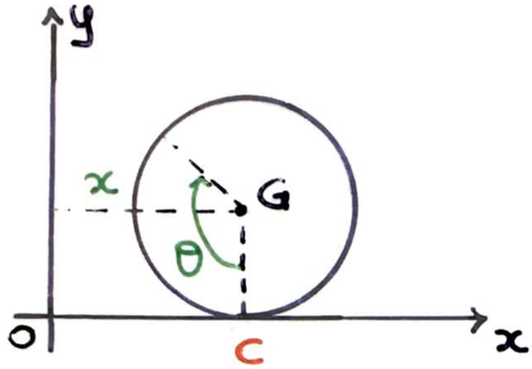
$$= mL^2 \left(0, \frac{1}{3}\omega, 0 \right) = \frac{1}{3} mL^2 \omega \bar{\jmath}$$

Volendo calcolare ora K_r :

- $K_r = \bar{K}_O \cdot \bar{r} = \frac{1}{3} mL^2\omega (0, 1, 0) \cdot (0, 1, 1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$= \underline{\frac{\sqrt{2}}{6} mL^2\omega}$$

4) Calcolare T del disco (m, R) che rotola senza strisciare su una retta orizzontale.



1 g. di libertà

$q = x_G$ oppure $q = \theta$

$\dot{x} = R\dot{\theta}$

C centro di rot. istant.

$\bar{v}_C = \bar{0}$

• $T = \frac{1}{2} m v_G^2 + T' = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \frac{3}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$

oppure

$T = \frac{1}{2} \frac{3}{2} m \dot{x}^2$

$T' = \frac{1}{2} I_{Gz} \omega^2$

Essendo $\bar{v}_C = \bar{0} \Rightarrow$ • $T = \frac{1}{2} I_{C_z} \dot{\theta}^2$ con $I_{C_z} = \underset{mR^2/2}{\underset{\shortparallel}{I_{Gz}}} + mR^2$

<u>Se il disco rotola e striscia $\Rightarrow$ 2 g. di libertà</u>

$q_1 = x_G = x \quad , \quad q_2 = \theta$

• $T = \frac{1}{2} m v_G^2 + T' = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \dot{\theta}^2$

Il punto di contatto tra disco e asse Ox NON È il C.I.R.

• Calcolare il momento della quantità di moto rispetto al punto di contatto in entrambi i casi.

1) $H \equiv C$

$\bar{K}_C = \underset{\sim}{I}_C \bar{\omega} = I_{Cz}(-\dot{\theta}\vec{k}) = -\frac{3}{2} m R^2 \dot{\theta} \vec{k} = -\frac{3}{2} m R \dot{x} \vec{k}$

2) $H \neq C$

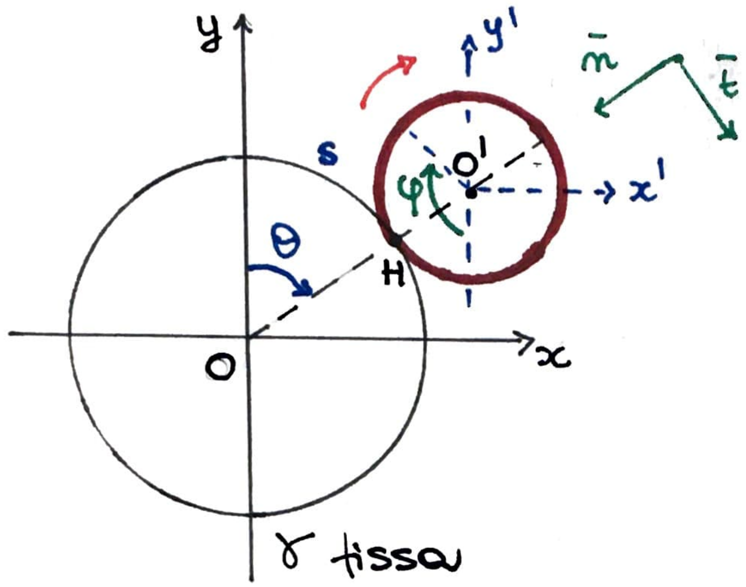
$\bar{K}_H = \bar{K}'_G + m \bar{v}_G \times (H - G) = I_{Gz}(-\dot{\theta}\bar{k}) + m \dot{x} \bar{i} \times (-R\bar{j})$

$= -\frac{mR^2}{2} \dot{\theta} \bar{k} - mR\dot{x}\bar{k}$

$= -\left(mR\dot{x} + \frac{mR^2}{2}\dot{\theta}\right)\vec{k}$

5) Disco (O', r, m) che rotola senza strisciare su profilo circolare γ fisso di raggio R.

Calcolare T.



1! grado di libertà

$q = \theta$

oppure

$q = \varphi$

$\Rightarrow$ trovare il legame tra θ e φ. (cinematica)

$$\bar{v}_{O'} = (R+r)\dot{\theta}\,\vec{t}$$

$$\bar{\omega}_D = -\dot{\varphi}\,\vec{k}$$

$$\bar{v}_{O'} = \bar{\omega}_D \times (O'-H) = -\dot{\varphi}\,\vec{k} \times (-r)\bar{m} = r\dot{\varphi}\,\vec{k} \times \bar{m} = r\dot{\varphi}\,\vec{t}$$

$$\Rightarrow (R+r)\dot{\theta} = r\dot{\varphi} \qquad \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{(R+r)}{r}\dot{\theta}$$

$H \equiv C$

- $$T = \frac{1}{2} I_{Cz}\,\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{mr^2}{2} + mr^2\right) \cdot \frac{(R+r)^2}{r^2}\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} m (R+r)^2 \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} m (R+r)^2 \dot{\theta}^2$$

Col teorema di König si ottiene lo stesso risultato

$$T = \frac{1}{2} m v_{O'}^2 + T' \qquad \text{dove } T' = \frac{1}{2} I_{O'z}\,\omega^2$$

$$\bar{v}_{O'} = (R+r)^2\dot{\theta}^2$$

$$I_{O'z} = \frac{mr^2}{2} \quad \Rightarrow T' = \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\frac{m\cancel{r^2}}{2}\frac{(R+r)^2}{\cancel{r^2}}\dot{\theta}^2$$