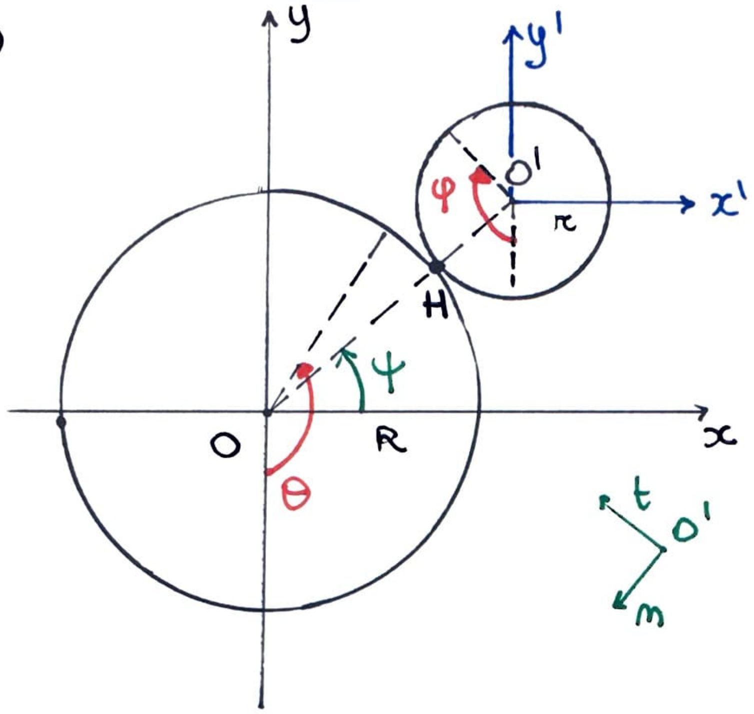
6)



$\bar{\omega}_{D_1} = +\dot{\theta}\,\vec{k}$

$\bar{\omega}_{D_2} = -\dot{\varphi}\,\bar{k}$

ψ: angolo geometrico

Il rotolamento senza strisciamento di D_2 su D_1

$\Downarrow$

$$\dot{\psi} = \frac{R\dot{\theta} - r\dot{\varphi}}{(R+r)}$$ VEDI CINEMAT.

Sistema materiale costituito dal disco D_1 di centro O, raggio R e massa M, omogeneo, che ruota attorno ad O e dal disco D_2 omogeneo, di centro O', raggio r e massa m, che rotola senza strisciare su D_1.

Calcolare $\vec{K}_O$ e T.

$$\bar{K}_O = \vec{K}_O(D_1) + \bar{K}_O(D_2)$$

$$\vec{K}_O(D_1) = \frac{MR^2}{2}\dot{\theta}\,\vec{k}$$

$$\bar{K}_O(D_2) = \bar{K}_{O'} + m\bar{v}_{O'} \times (O - O')$$

$$= -\frac{mr^2}{2}\dot{\varphi}\,\vec{k} + m(R+r)\dot{\psi}\,\vec{t} \times (R+r)\,\vec{n}$$

$$= -\frac{mr^2}{2}\dot{\varphi}\,\bar{k} + m(R+r)^2\frac{(R\dot{\theta} - r\dot{\varphi})}{\cancel{(R+r)}}\,\bar{k}$$

$$T = T_{D_1} + T_{D_2}$$

$$T_{D_1} = \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\dot{\theta}^2$$

$$T_{D_2} = \frac{1}{2}mv_{O'}^2 + T' = \frac{1}{2}m\underbrace{(R+r)^2\dot{\psi}^2}_{= (R\dot{\theta} - r\dot{\varphi})^2} + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\dot{\varphi}^2$$

LEGAME CINEMATICO

$$\dot{\psi} = \frac{R\dot{\theta} - r\dot{\varphi}}{(R+r)}$$

il p.to O' descrive una circonferenza di raggio $(R+r)$.
Introdotto l'angolo geometrico ψ si ha:

- $\bar{v}_{O'} = (R+r)\dot{\psi}\,\vec{t}$

Ma anche vale la F.F.C.C.R, per cui presi $O', H' \in \mathcal{D}_2$:

$\bar{v}_{O'} = \bar{v}_{H'} + \bar{\omega}_{\mathcal{D}_2} \times (O'-H')$

Ma per il rotolamento senza strisciamento

$\bar{v}_{H'} = \bar{v}_{H''} \qquad H'' \in \mathcal{D}_1$

$\bar{v}_{H''} = R\dot{\theta}\,\vec{t}$

$\bar{\omega}_{\mathcal{D}_2} \times (O'-H') = -\dot{\varphi}\vec{k} \times (-r\vec{n}) = \dot{\varphi} r(-\vec{t}) = -r\dot{\varphi}\vec{t}$

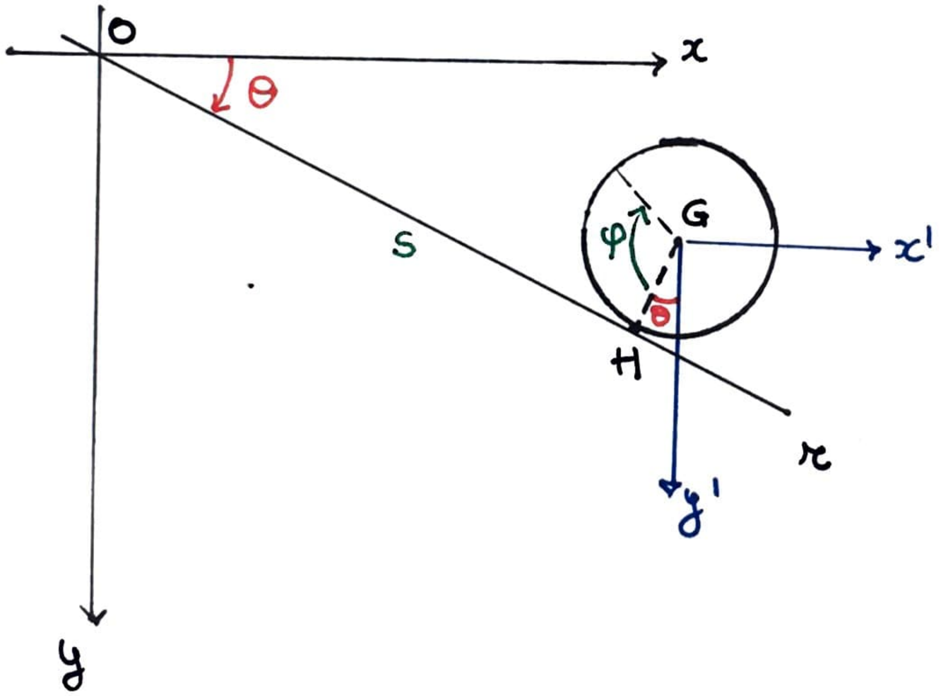
Quindi:

- $\bar{v}_{O'} = R\dot{\theta}\vec{t} - r\dot{\varphi}\vec{t} = (R\dot{\theta} - r\dot{\varphi})\vec{t}$

Uguagliando le 2 espressioni di $\bar{v}_{O'}$ si ha

$$(R+r)\dot{\psi} = R\dot{\theta} - r\dot{\varphi}$$

7) Calcolare l'energia cinetica T di un disco $\mathcal{D}$, omogeneo, di massa m e raggio R, che rotola senza strisciare su una retta r mobile attorno ad un suo punto fisso O, nel riferimento verticale Oxy.



Il disco ha 2 gradi di libertà.

$q_1 = \theta$ angolo di rotazione della retta

$q_2 = \varphi$ angolo di rotazione del disco sulla retta r.

Poiché il disco rotola senza strisciare esiste il legame $\dot{s} = R\dot{\varphi}$ (vedi cinematica) $\Rightarrow q_2 = s_G$ al posto di φ.

La velocità angolare del disco è:

$\bar{\omega} = \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_\tau = \dot{\varphi}\,\vec{k} + \dot{\theta}\,\vec{k} = (\dot{\theta} + \dot{\varphi})\,\vec{k}$

(al posto di $\dot{\varphi}$ si può usare $\frac{\dot{s}}{R}$)

$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + T'$ dove $T' = \frac{1}{2} I_{Gz} \omega^2$

Nel rif. di König $\vec{\omega} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_\tau = (\dot\varphi + \dot\theta)\bar{k}$

$$\begin{cases} x_G = s\cos\theta + R\,\text{sen}\,\theta \\ y_G = s\,\text{sen}\,\theta - R\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_G = \dot{s}\cos\theta - s\,\text{sen}\,\theta\,\dot\theta + R\cos\theta\,\dot\theta \\ \dot{y}_G = \dot{s}\,\text{sen}\,\theta + s\cos\theta\,\dot\theta + R\,\text{sen}\,\theta\,\dot\theta \end{cases}$$

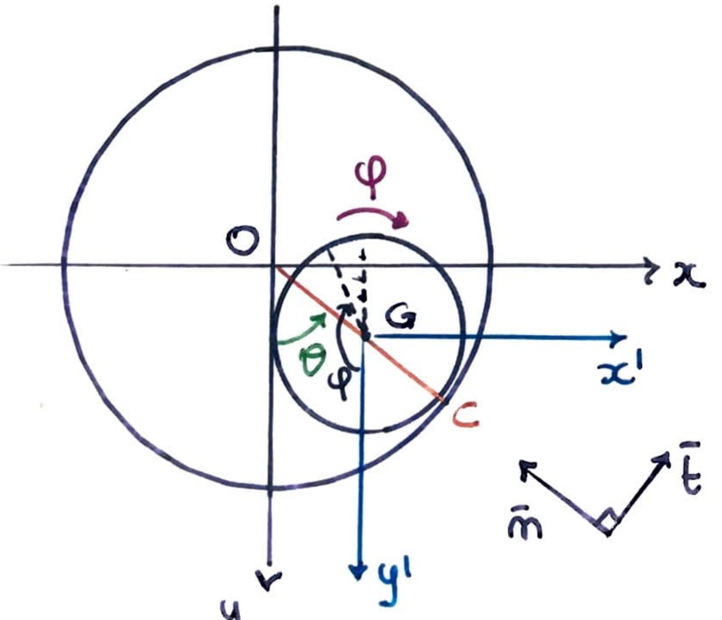
$$v_G^2 = \dot{s}^2 + s^2\dot\theta^2 + R^2\dot\theta^2 + 2R\dot{s}\dot\theta$$

$$T' = \frac{1}{2}\,\frac{mR^2}{2}(\dot\theta + \dot\varphi)^2$$

poichè $\dot{s} = R\dot\varphi$, sostituendo: $(s = R\varphi)$

- $T = \frac{1}{2} mR^2\left[\frac{3}{2}\dot\varphi^2 + 3\dot\varphi\dot\theta + \left(\frac{3}{2} + \varphi^2\right)\dot\theta^2\right]$

8) Calcolare T del disco (m, r) che rotola senza strisciare all'interno di un profilo circolare $\gamma(O, R)$ fisso.



1 g. di libertà:

$q = \theta$

N.B. $\dot\theta$ non è la velocità angolare del disco.

$\bar{v}_G = (R - r)\dot\theta\,\bar{t}$

$\bar{v}_G = \cancel{\bar{v}_C} + \bar{\omega} \times (G - C)$

$\bar{v}_G = \omega \bar{k} \times r \bar{n} = r\omega \bar{t}$

uguagliando le 2 espressioni $\Rightarrow \vec{\omega} = \frac{(R-r)}{r} \dot{\theta} \bar{k}$

- $T = \frac{1}{2} m v_G^2 + T' = \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m r^2}{2}}_{I_{Gz}} \frac{(R-r)^2}{r^2} \dot{\theta}^2$

$= \frac{1}{2} \frac{3}{2} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2$

oppure ricordando che $\bar{v}_C = \bar{0}$

- $T = \frac{1}{2} I_{C_z} \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{3}{2} m \cancel{r^2} \frac{(R-r)^2}{\cancel{r^2}} \dot{\theta}^2$

se utilizzo come parametro lagrangiano l'angolo di rotazione propria del disco φ allora:

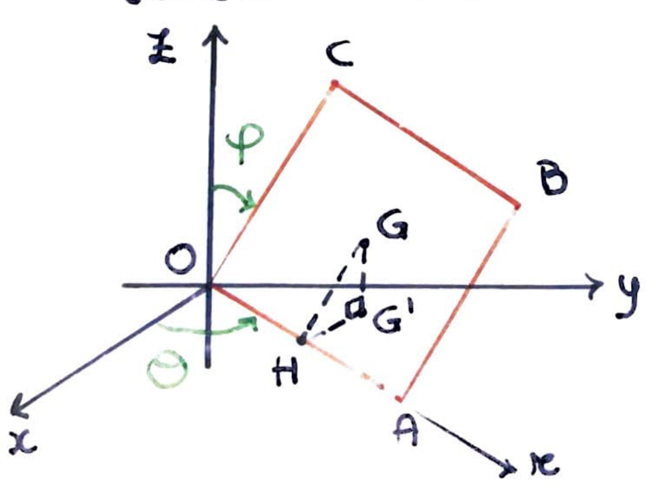
$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \bar{k}$

- $T = \frac{1}{2} I_{Cz} \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{3}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2$

$\bar{v}_G = \bar{\omega} \times (G-C) = r \dot{\varphi} \bar{t}$

e chiaramente $\dot{\varphi} = \frac{R-r}{r} \dot{\theta}$.

9) Calcolare T di una lamina quadrata (m, l) avente un punto fisso O ed il lato OA scorre senza attrito su Oxy.



2 g. di libertà

$q_1 = \theta$

$q_2 = \varphi$ $\in [0, 2\pi)$

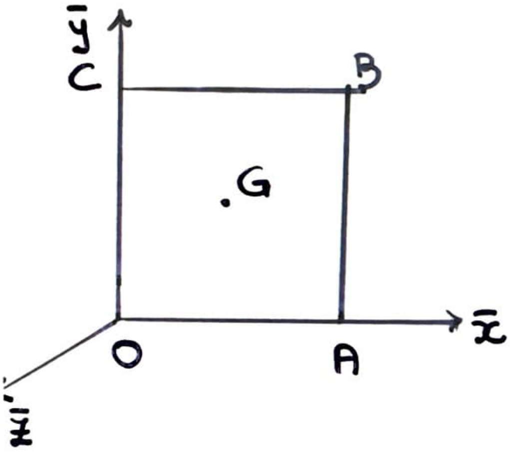
$\vec{\omega} = \dot{\theta} \bar{k} + \dot{\varphi} \vec{r}$

$\bar{r}$ direzione variabile

La lamina ha un punto fisso: O

$$T = \frac{1}{2}\, \underset{\sim}{I}_O\, \bar{\omega}\cdot\bar{\omega}$$

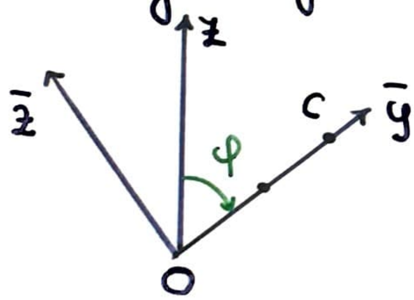
Scelto un sistema di riferimento solidale con $\mathcal{L}$.



$$\underset{\sim}{I}_O = m\ell^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$O\bar{x} \equiv Or$

bisogna proiettare $\vec{\omega}$ in $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$.



$$\bar{k} = \cos\varphi\, \vec{i}_2 + \operatorname{sen}\varphi\, \vec{i}_3$$

$$\boxed{\vec{\omega} = -\dot{\varphi}\, \vec{i}_1 + \cos\varphi\, \dot{\theta}\, \vec{i}_2 + \operatorname{sen}\varphi\, \dot{\theta}\, \vec{i}_3}$$

Quindi:

$$T = \frac{1}{2} m\ell^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\varphi} \\ \cos\varphi\, \dot{\theta} \\ \operatorname{sen}\varphi\, \dot{\theta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\dot{\varphi} \\ \cos\varphi\, \dot{\theta} \\ \operatorname{sen}\varphi\, \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} m\ell^2 \left[\frac{1}{3}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}\cos\varphi\, \dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{1}{4}\dot{\varphi}\cos\varphi\, \dot{\theta} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\cos^2\varphi\, \dot{\theta}^2 + \frac{2}{3}\operatorname{sen}^2\varphi\, \dot{\theta}^2 \right]$$

$$T = \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{3}\left[(1+\operatorname{sen}^2\varphi)\dot{\theta}^2 + \frac{3}{2}\cos\varphi\, \dot{\theta}\dot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 \right]$$

Allo stesso risultato si perviene utilizzando König:

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + T' \quad \text{dove} \quad T' = \frac{1}{2} \underset{\sim}{I}'_G \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}$$

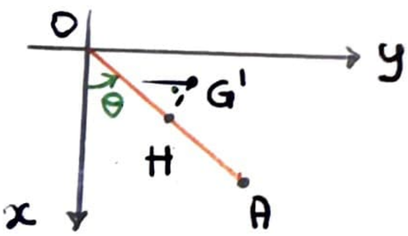
con $\underset{\sim}{I}'_G$ matrice d'inerzia rispetto ad un rif. solidale con ℓ baricentrico principale d'inerzia.

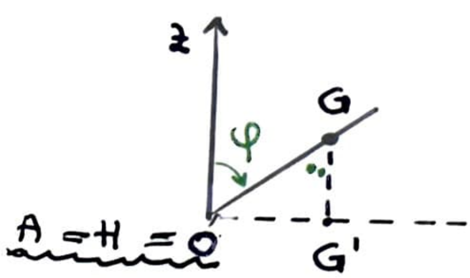
$$\underset{\sim}{I}'_G = \frac{m\ell^2}{12} \operatorname{diag}(1, 1, 2)$$

($\vec{\omega}$ come prima)

ma bisogna determinare le coordinate di G.

$$\begin{cases} x_G = \frac{\ell}{2}\cos\theta - \left(\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\varphi\right)\operatorname{sen}\theta \\ y_G = \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta + \left(\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\varphi\right)\cos\theta \\ z_G = \frac{\ell}{2}\cos\varphi \end{cases}$$





e derivarle rispetto al tempo.

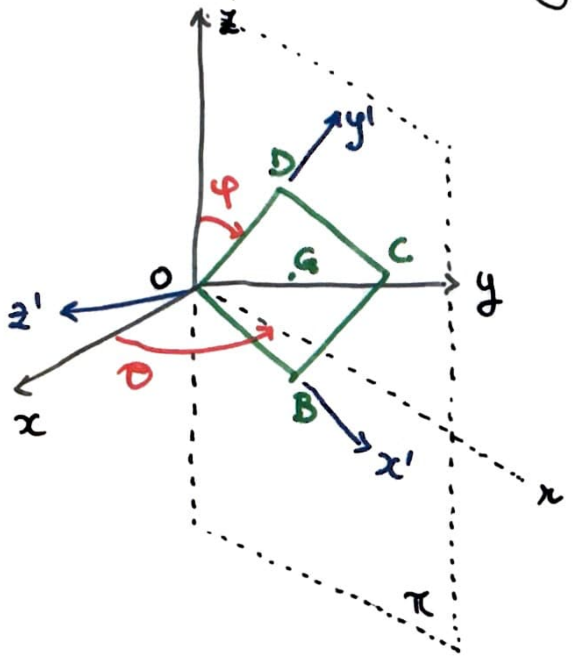
N. B.:

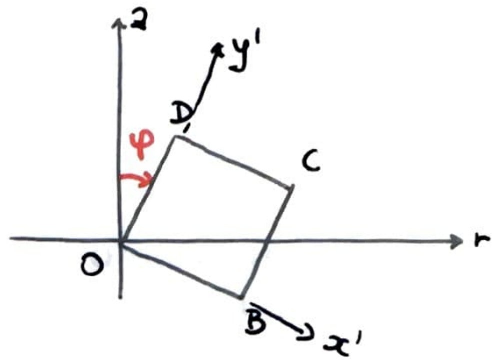
In entrambe i casi, poiché $\bar{\omega}$ non ha una direzione fissa in Oxyz, il momento d'inerzia I_ω non è costante e di difficile calcolo.

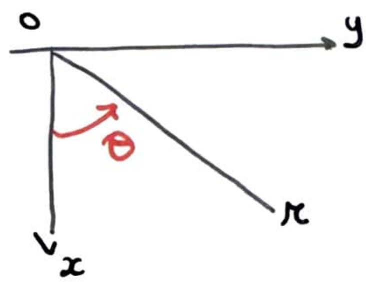
$$T = \frac{1}{2} \underset{\sim}{I}_0 \bar{\omega} \cdot \bar{\omega} = \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\underset{\sim}{I}_0 \bar{u} \cdot \bar{u}}_{I_\omega} = \frac{1}{2} I_\omega \omega^2$$

se $\bar{\omega} = \omega \bar{u}$

Lamina quadrato omogenea (m, L) mobile in π con O fisso







$q_1 = \theta \; ; \; q_2 = \varphi$

$\Rightarrow \bar{\omega} = \dot{\theta}\, \bar{\imath}_3 - \dot{\varphi}\, \bar{\imath}_3'$

$\bar{\imath}_3 = -\sin\varphi\, \bar{\imath}_1' + \cos\varphi\, \bar{\imath}_2'$

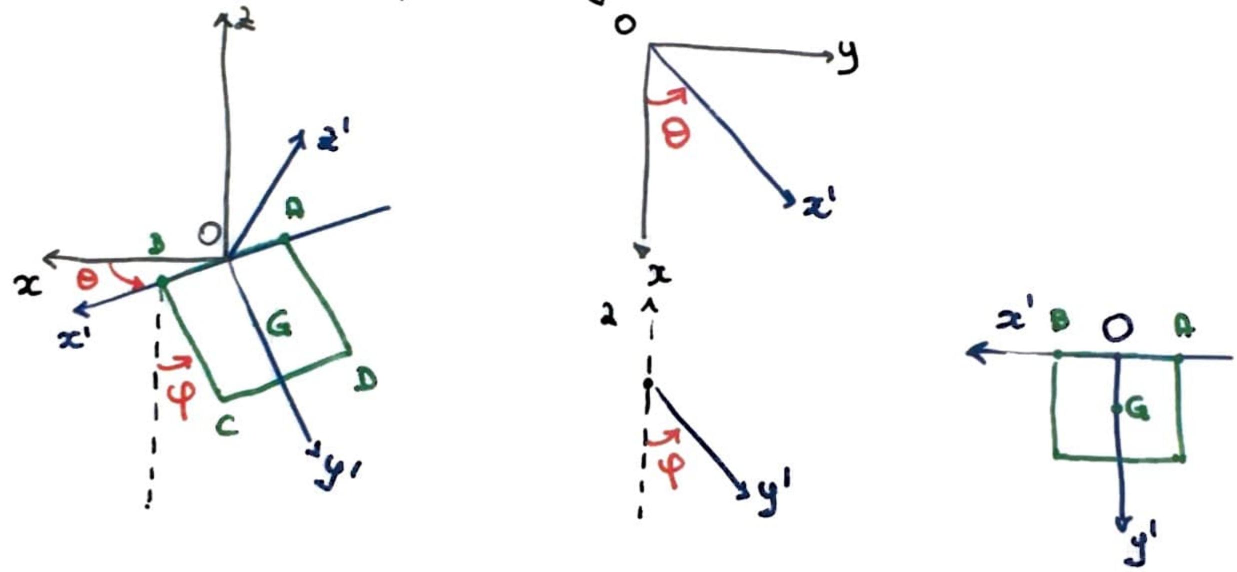
$\Rightarrow \bar{\omega} = (-\dot{\theta}\sin\varphi, \; \dot{\theta}\cos\varphi, \; -\dot{\varphi})$ eq. cinematiche di Eulero.

$$T = \frac{1}{2} \underset{\sim}{I}_O\, \bar{\omega} \cdot \bar{\omega}$$

$$= \frac{mL^2}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\theta}\sin\varphi \\ \dot{\theta}\cos\varphi \\ -\dot{\varphi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\dot{\theta}\sin\varphi \\ \dot{\theta}\cos\varphi \\ -\dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} mL^2 \left[\frac{1}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi\, \dot{\theta}^2 + \frac{2}{3}\dot{\varphi}^2 \right]$$

Lamina quadrata omogenea (m, L) con lato saldato ad una retta rotante nel piano Oxy attorno ad O.



$q_1 = \theta \quad ; \quad q_2 = \varphi$

$\Rightarrow \vec{\omega} = \dot{\theta}\,\bar{\imath}_3 + \dot{\varphi}\,\bar{\imath}_1'$

$\bar{\imath}_3 = -\cos\varphi\,\bar{\imath}_2' + \sin\varphi\,\bar{\imath}_3'$

$\Rightarrow \bar{\omega} = (\dot{\varphi}, -\cos\varphi\,\dot{\theta}, \sin\varphi\,\dot{\theta})$ equazioni cinematiche di Eulero

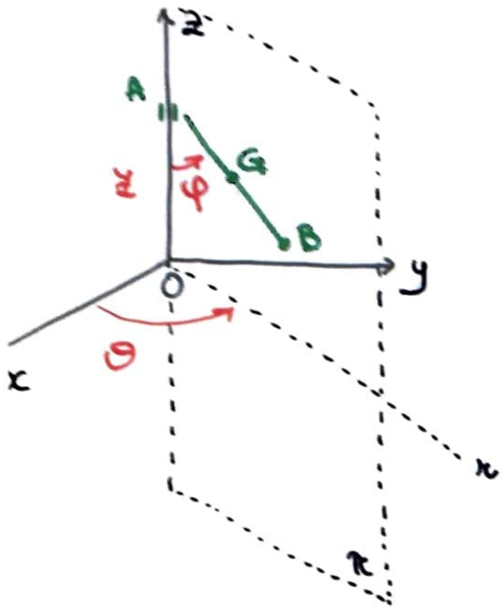
$T = \frac{1}{2}\,\underset{\sim}{I}_0\,\bar{\omega}\cdot\bar{\omega}$

$$\underset{\sim}{I}_0 = mL^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{12} \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{1}{2} mL^2 \left[\frac{1}{3}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{12}\cos^2\varphi\,\dot{\theta}^2 + \frac{5}{12}\sin^2\varphi\,\dot{\theta}^2 \right]$$

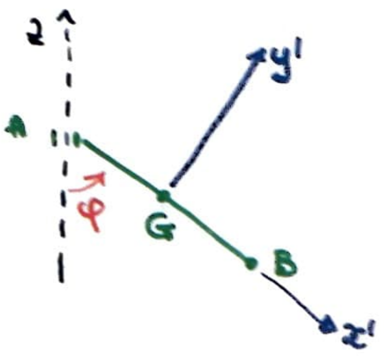
$$= \frac{1}{2} mL^2 \left[\frac{1}{3}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{12}(1 + 4\sin^2\varphi)\,\dot{\theta}^2 \right]$$

Asta AB omogenea (m, L) mobile nel piano π con $A \in Oz$.



$q_1 = \theta$; $q_2 = \varphi$; $q_3 = z$

$\bar{\omega} = \dot{\theta}\, \bar{\imath}_3 + \dot{\varphi}\, \bar{\imath}'_3 \qquad \bar{\imath}'_3 \perp \pi$



$\bar{\imath}_3 = -\cos\varphi\, \bar{\imath}'_1 + \sin\varphi\, \bar{\imath}'_2$

$\bar{\omega} = (-\cos\varphi\, \dot{\theta}, \sin\varphi\, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$

L'asta non ha punti fissi.

$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + T'$ dove $T' = \frac{1}{2} \underset{\sim}{I}_G \bar{\omega} \cdot \bar{\omega}$ $\quad \underset{\sim}{I}_G$ nel rif. solidale. (≠ rif. di König)

$$\begin{cases} x_G = \frac{L}{2} \sin\varphi \cos\theta \\ y_G = \frac{L}{2} \sin\varphi \sin\theta \\ z_G = z - \frac{L}{2} \cos\varphi \end{cases}$$

$$\bar{v}_G : \begin{cases} \dot{x}_G = \frac{L}{2} \cos\varphi\, \dot{\varphi} \cos\theta - \frac{L}{2} \sin\varphi \sin\theta\, \dot{\theta} \\ \dot{y}_G = \frac{L}{2} \cos\varphi\, \dot{\varphi} \sin\theta + \frac{L}{2} \sin\varphi \cos\theta\, \dot{\theta} \\ \dot{z}_G = \dot{z} - \frac{L}{2} \sin\varphi\, \dot{\varphi} \end{cases}$$

$$v_G^2 = \frac{L^2}{4} \cos^2\varphi\, \dot{\varphi}^2 + \frac{L^2}{4} \sin^2\varphi\, \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 - L \sin\varphi\, \dot{z} \dot{\varphi} + \frac{L^2}{4} \sin^2\varphi\, \dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{L^2}{4} \dot{\varphi}^2 + \frac{L^2}{4} \sin^2\varphi\, \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 - L \sin\varphi\, \dot{z} \dot{\varphi}$$

$$\underset{\sim}{I}_G = \frac{mL^2}{12} \operatorname{diag}(0, 1, 1)$$

$$T' = \frac{1}{2} \underset{\sim}{I}_G \bar{\omega} \cdot \bar{\omega} = \frac{1}{2} \cdot \frac{mL^2}{12} \left(\sin^2\varphi\, \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \right)$$