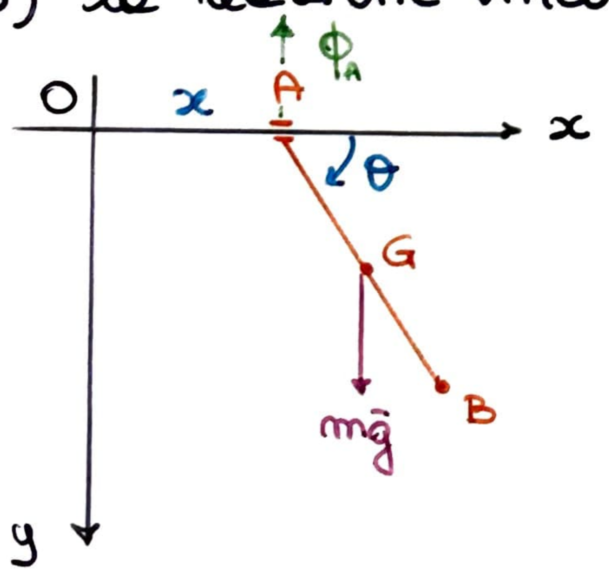
EQUAZIONI CARDINALI

1) In un piano verticale Oxy è mobile una asta AB omogenea e pesante, di massa m e lunghezza 2ℓ, avente l'estremo A scorrevole senza attrito su Ox. Determinare:

1) le eq. differenziali di moto;
2) la reazione vincolare dinamica nell'istante $t=0$ in cui $A\equiv O$, $B=(2\ell,0)$ e l'atto di moto è nullo;
3) integrali primi di moto;
4) posizioni di equilibrio;
5) la reazione vincolare all'equilibrio.



vincolo fisso

f. attiva conservativa

2 g. di libertà:

$q_1 = x_A = x \qquad x \in \mathbb{R}$

$q_2 = \theta \qquad \theta \in [0, 2\pi)$

$$\frac{d}{dt}\vec{Q} = \bar{R}^e + \bar{\Phi}^e$$ proiettato sugli assi:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_G = 0 & \text{1ª eq. diff. di moto} \\ m\ddot{y}_G = mg - \phi_A \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_G = x + l\cos\theta \\ y_G = l\,\text{sen}\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_G = \dot{x} - l\,\text{sen}\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y}_G = l\cos\theta\,\dot{\theta} \end{cases}$$

$m\ddot{x}_G = 0 \Rightarrow \dot{x}_G = \text{costante}$ 1° integrale primo di moto

c. i. $\begin{cases} x(0)=0 \\ \theta(0)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}(0)=0 \\ \dot{\theta}(0)=0 \end{cases}$

$\dot{x}_G = \dot{x}_G(0) = 0 \Rightarrow \underline{\dot{x} - l\,\text{sen}\theta\,\dot{\theta} = 0}$

$\ddot{y}_G = l\cos\theta\,\ddot{\theta} - l\,\text{sen}\theta\,\dot{\theta}^2$

$\phi_A = m(g - l\cos\theta\,\ddot{\theta} + l\,\text{sen}\theta\,\dot{\theta}^2)$

• $\phi_A(t=0) = m(g - l\,\underline{\underline{\ddot{\theta}(0)}})$
↓ da determinare

$\frac{d}{dt}\vec{K}_G = \cancel{\vec{\Omega}^e_G} + \vec{\Psi}^e_G$

$\vec{K}_G = I_{Gz}\vec{\omega} = \frac{m\,4l^2}{12}\dot{\theta}\vec{k} = \frac{ml^2}{3}\dot{\theta}\vec{k}$

$\vec{\Psi}^e_G = (A-G)\times\vec{\phi}_A = l\,\phi_A\cos\theta\,\vec{k}$

$\frac{ml^{\cancel{2}}}{3}\ddot{\theta} = \cancel{l}\,\phi_A\cos\theta$ ← per sostit. ottengo la 2ª eq. diff. del moto

per $t=0$ • $\phi_A(t=0) = \frac{ml}{3}\ddot{\theta}(0)$

uguagliando le 2 espressioni di ϕ_A:

$\frac{ml}{3}\ddot{\theta}(0) = mg - ml\,\ddot{\theta}(0) \Rightarrow \underline{\ddot{\theta}(0) = \frac{3}{4}\,g/l}$

$\Rightarrow \underline{\phi_A = \frac{1}{4}mg}$ reazione vincolare dinamica in $t=0$

$$\frac{ml}{3}\ddot{\theta} = m(g - l\cos\theta\,\ddot{\theta} + l\,\mathrm{sen}\theta\,\dot{\theta}^2)\cos\theta$$

- $$\left(\frac{1}{3} + \cos^2\theta\right)\ddot{\theta} - \mathrm{sen}\theta\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - \frac{g}{l}\cos\theta = 0$$ 2° eq. diff. di moto

vale $T + V = E$ dove $E = T_0 + V_0$

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + T' = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - 2l\,\mathrm{sen}\theta\,\dot{x}\dot{\theta} + l^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 - 2l\,\mathrm{sen}\theta\,\dot{x}\dot{\theta} + \frac{4}{3}l^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$U = mg\,y_G = mgl\,\mathrm{sen}\theta$$

- $$\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 - 2l\,\mathrm{sen}\theta\,\dot{x}\dot{\theta} + \frac{4}{3}l^2\dot{\theta}^2\right) - mgl\,\mathrm{sen}\theta = 0$$ 2° int. primo di moto

4) $\bar{R}^e + \bar{\phi}^e = \bar{0} \Rightarrow mg - \phi_A = 0$ $\quad \phi_A = mg$ r. vincolare statica

5) $\bar{\Omega}^e_A + \cancel{\bar{\Psi}^e_A} = \bar{0} \Rightarrow (G-A)\times m\bar{g} = \bar{0}$

$\Rightarrow mgl\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \; \theta = \frac{3}{2}\pi$

ma x_e è indeterminato $\Rightarrow \infty$ posizioni di equilibrio

Allo stesso risultato si perviene con la S.P.:

$U = mgl\,\mathrm{sen}\theta \Rightarrow U = U(\theta)$

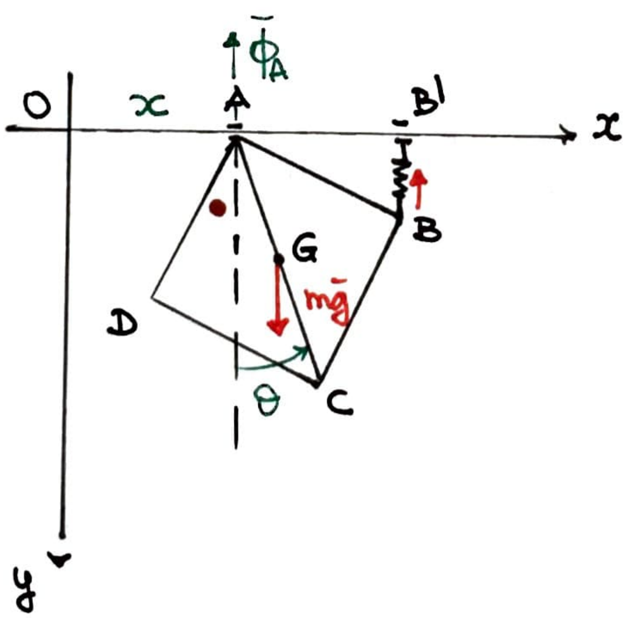
$U_\theta = mgl\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pm\pi/2$.

N.B: c.i.

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \theta(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}(0) = 0 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases}$$

2) In un piano verticale Oxy si consideri una lamina quadrata omogenea e pesante, di massa m e diagonale $d = 2L$, avente il vertice A scorrevole su Ox. Oltre alla forza peso sulla lamina agisce la forza elastica $\bar{F}_B = -k(B - B')$ con B' proiezione ortogonale di B su Ox. Supposti i vincoli lisci si chiede:

1) determinare le equazioni differenziali del moto
2) la reazione vincolare dinamica
3) integrali primi di moto
4) posizioni di equilibrio
5) reazione vincolare all'equilibrio



$\overline{AB} = \sqrt{2}L$

C.R. a vincoli lisci e fissi soggetto a forze conservative con 2 g. di libertà:

$q_1 = x_A = x \in \mathbb{R}$

$q_2 = \theta \in [0, 2\pi)$

angolo "•" $= \frac{\pi}{4} - \theta \quad \Rightarrow \quad O\hat{A}D = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \theta = \frac{\pi}{4} + \theta$

$\Rightarrow \quad B'AB = \pi - \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{\pi}{4} - \theta$

· Punti notevoli

$A(x, 0)$

$G(x + L\sin\theta, L\cos\theta)$

$B\left(x + L\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right); L\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right)$

① $\frac{d}{dt}\bar{Q}^{\circ} = \bar{R}^e + \bar{\Phi}^e \rightarrow m\bar{a}_G = m\bar{g} - k(B-B') + \bar{\Phi}_A$

proiettata su Ox e Oy:

$$\begin{cases} \underline{m\ddot{x}_G = 0} & 1^a \text{ eq. diff. del moto} \\ m\ddot{y}_G = mg - ky_B - \phi_A \end{cases}$$

$\bar{v}_G(\dot{x} + L\cos\theta\,\dot{\theta}, -L\sin\theta\,\dot{\theta})$

$\bar{a}_G(\ddot{x} + L\cos\theta\,\ddot{\theta} - L\sin\theta\,\dot{\theta}^2, -L\sin\theta\,\ddot{\theta} - L\cos\theta\,\dot{\theta}^2)$

$\underline{\ddot{x}_G = 0} \mapsto \dot{x}_G = \text{costante} \rightarrow \underline{\dot{x} + L\cos\theta\,\dot{\theta} = c}$ 1° integrale primo di moto

$\underline{\phi_A = mg - kL\sqrt{2}\sin(\pi/4 - \theta) + mL(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2)}$

reazione vincolare dinamica

② $\frac{d}{dt}\dot{\bar{k}}_G = \bar{\Omega}^e_G + \bar{\Psi}^e_G$

se scelgo un polo $P \neq G$ o da O o con velocità $\not\parallel \bar{v}_G$ allora devo aggiungere il termine $m\bar{v}_G \times \bar{v}_P$ a primo membro.

$\bar{k}_G = \underset{\sim}{I}_G\,\bar{\omega}$ ma $\bar{\omega} = -\dot{\theta}\vec{k}$

$= -I_{Gz}\,\dot{\theta}\bar{k} = -\frac{1}{12}m\left[(\sqrt{2}L)^2 + (\sqrt{2}L)^2\right]\dot{\theta}\bar{k}$

$= -\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}\vec{k}$

$$\bar{\Omega}^e_G = (B-G)\times[-k(B-B')]$$

$$=[(x_B-x_G)\bar{i}+(y_B-y_G)\bar{j}]\times[-k\,y_B\,\bar{j}]$$

$$=-k\,y_B(x_B-x_G)\,\vec{k}$$

$$=-k\,L\sqrt{2}\sin(\pi/4-\theta)\big(L\sqrt{2}\cos(\pi/4-\theta)-L\sin\theta\big)\,\vec{k}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\sin\pi/4\cos\theta-\cos\pi/4\sin\theta$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta-\sin\theta)$$

$$\cos(\pi/4-\theta)=\cos\pi/4\cos\theta+\sin\pi/4\sin\theta$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta+\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \bar{\Omega}^e_G=-kL^2(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta)\,\vec{k}$$

$$\bar{\Psi}^e_G=(A-G)\times\bar{\Phi}_A=[(x_A-x_G)\bar{i}+(-y_G)\bar{j}]\times(-\Phi_A\bar{j})$$

$$=-\Phi_A(x_A-x_G)\bar{k}=+\Phi_A L\sin\theta\,\bar{k}$$

$$-\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta}=-kL^2\cos\theta(\cos\theta-\sin\theta)+\Phi_A L\sin\theta$$

↑ sostituendo Φ_A

$$-\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta}=-kL^2\cos\theta(\cos\theta-\sin\theta)+L\sin\theta\big[mg+$$
$$+mL(\sin\theta\,\ddot{\theta}+\cos\theta\,\dot{\theta}^2)-kL(\cos\theta-\sin\theta)\big]$$

$$=+mL^2(\sin^2\theta\,\ddot{\theta}+\cos\theta\sin\theta\,\dot{\theta}^2)+mgL\sin\theta+$$
$$+kL^2(-\cos^2\theta+\cancel{\cos\theta\sin\theta}-\cancel{\sin\theta\cos\theta}+\sin^2\theta)$$

$$mL^2\left(\frac{1}{3}+\sin^2\theta\right)\ddot{\theta}+mL^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}^2+mgL\sin\theta-kL^2\cos2\theta=0$$

2ª eq. differenziale di moto

Per le ipotesi sul sistema vale $T+V=E$

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + T'$$

$$v_G^2 = (\dot{x} + L\cos\theta\,\dot{\theta})^2 + (-L\sin\theta\,\dot{\theta})^2 = \dot{x}^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2L\cos\theta\,\dot{x}\dot{\theta}$$

$$T' = \frac{1}{2} I_{Gz}\,\omega^2 = \frac{1}{2}\,\frac{mL^2}{3}\,\dot{\theta}^2$$

$$V = -U$$

$$U = mg\,y_G - \frac{1}{2} k\,\overline{BB'}^2 + c$$

$$= mgL\cos\theta - \frac{1}{2} kL^2(\cos\theta - \sin\theta)^2$$

$$\frac{1}{2} m\left[\dot{x}^2 + \frac{4}{3}L^2\dot{\theta}^2 + 2L\cos\theta\,\dot{x}\,\dot{\theta}\right] - mgL\cos\theta + \frac{1}{2}kL^2(\cos\theta - \sin\theta)^2 = E$$

2° integrale primo di moto

Per trovare le posizioni di equilibrio:

① $\bar{R}^e + \bar{\Phi}^e = \bar{0} \rightarrow m\bar{g} + \bar{\Phi}_A - k(B-B') = \bar{0}$

$\rightarrow mg - \phi_A - k y_B = 0$

$\phi_A = mg - kL(\cos\theta - \sin\theta)$ da valutare all'equilibrio

② $\Omega^e_A + \Psi^e_A = \bar{0} \rightarrow (G-A)\times m\bar{g} + (B-A)\times[-k(B-B')] = \bar{0}$

$$mgL\sin\theta - kL^2\underbrace{(\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta)}_{\cos^2\theta - \sin^2\theta \,=\, 1 - 2\sin^2\theta} = 0$$

$$2kL\sin^2\theta + mg\sin\theta - kL = 0$$

scelto $k = mg/L$ $\rightarrow$ $2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$

$$\sin\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \left\langle \begin{array}{l} -1 \\ \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$\sin\theta = -1 \Rightarrow \theta = \frac{3}{2}\pi$

$\sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \quad , \quad \theta = \frac{5\pi}{6}$

$$\begin{cases} \phi_A\left(\frac{3}{2}\pi\right) = mg - mg(0+1) = 0 \\ \phi_A(\pi/6) = mg - mg\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = mg\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right) \\ \phi_A\left(\frac{5}{6}\pi\right) = mg - mg\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = mg\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

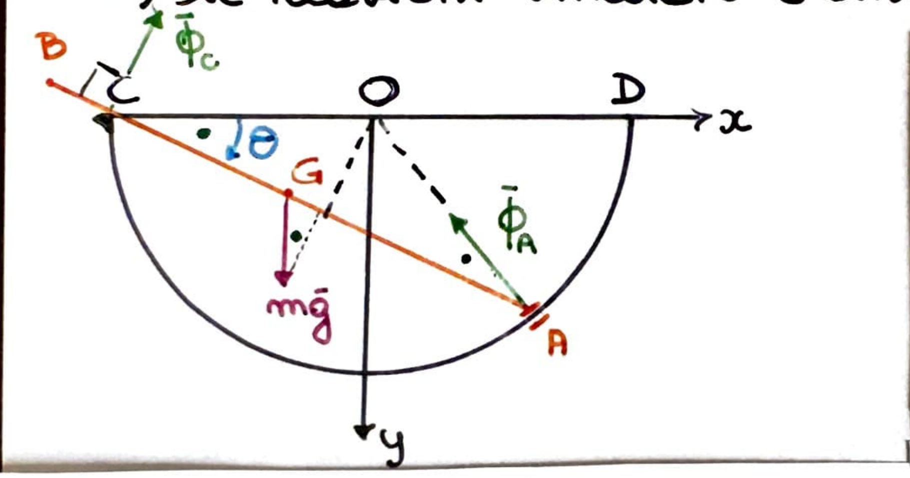
Tuttavia non trovo un'equazione per x $\Rightarrow x_e$ è indeterminato

$\Rightarrow \exists\ \infty$ posizioni di equilibrio $(x_e, \bar{\theta})$

3) In un piano verticale Oxy si consideri un'asta AB omogenea e pesante $(m, 2\ell)$ avente l'estremo A vincolato senza attrito ad una semicirconferenza $\widehat{CD}$ fissa $(O; R)$ e appoggiato senza attrito in C. Determinare:

1) le posizioni di equilibrio;

2) le reazioni vincolari statiche (all'equilibrio).



Per ipotesi $\ell > R$

vincoli lisci e fissi

forze attive conservative

1! g. di libertà

$q = \theta \qquad \theta \in (0, \pi/2)$ per ipotesi

$2\ell > 2R$ per ipotesi

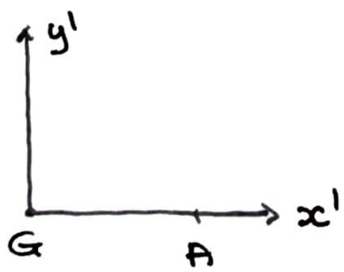
Con le equazioni cardinali della statica

$$\begin{cases} \bar{R} + \bar{\Phi}^e = \bar{0} \\ \bar{\Omega}^e_A + \bar{\Psi}^e_A = \bar{0} \end{cases}$$

3 eq. scalari in 3 incognite: θ_e, Φ_C, Φ_A.

$$\begin{cases} m\bar{g} + \bar{\Phi}_C + \bar{\Phi}_A = \bar{0} \\ (C-A) \times \bar{\Phi}_C + (G-A) \times m\bar{g} = \bar{0} \end{cases}$$

Proietto la 1ª eq. card. su un sist. di riferimento solidale con AB: $Gx'y'$ dove Gx' supporto di AB.



$$\begin{cases} mg \sin\theta - \Phi_A \cos\theta = 0 \\ -mg \cos\theta + \Phi_A \operatorname{sen}\theta + \Phi_C = 0 \end{cases}$$

DA VALUTARE ALL' EQUILIBRIO

$$\begin{cases} \Phi_A = mg \operatorname{tg}\theta \\ \Phi_C = mg\cos\theta - mg\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = mg\dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta} \quad (*) \end{cases}$$

Dalla 2ª eq. cardinale in $Gx'y'$

$$-\overline{AC}\,\Phi_C + \overline{GA}\,mg\sin[\pi-(\pi/2-\theta)] = 0$$

$$\overline{AC} = 2R\cos\theta$$

quindi

$$-2R\cos\theta\,\Phi_C + mg\ell\cos\theta = 0 \Rightarrow \underset{\neq 0}{\cos\theta}(mg\ell - 2R\,\Phi_C) = 0$$

perchè $\theta \neq \pi/2$

$$\Phi_C = mg\frac{\ell}{2R} \quad (*)$$

Uguagliando le due espressioni di Φ_C otteniamo:

$$\frac{\ell}{2R} = \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta} \rightarrow 4R\cos^2\theta \underbrace{-\ell\cos\theta}_{+\text{ variazione}} \overbrace{-\,2R}^{-\text{ permanenza}} = 0$$

$$\cos\theta = \frac{\ell \pm\sqrt{\ell^2+32R^2}}{8R}$$ acc. solo la radice positiva.

$$\theta \neq 0 \Rightarrow \cos\theta < 1 \Rightarrow \frac{\ell+\sqrt{\ell^2+32R^2}}{8R} < 1$$

$$\Rightarrow \ell^2+32R^2 < (8R-\ell)^2 \Rightarrow \ell < 2R$$

quindi $\theta_e = \arccos\dfrac{\ell+\sqrt{\ell^2+32R^2}}{8R}$ con $\underline{R < \ell < 2R}$

se $\ell = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}R \Rightarrow \theta_e = \pi/6$

$$\Phi_C = mg\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Phi_A = mg\frac{\sqrt{3}}{3}$$