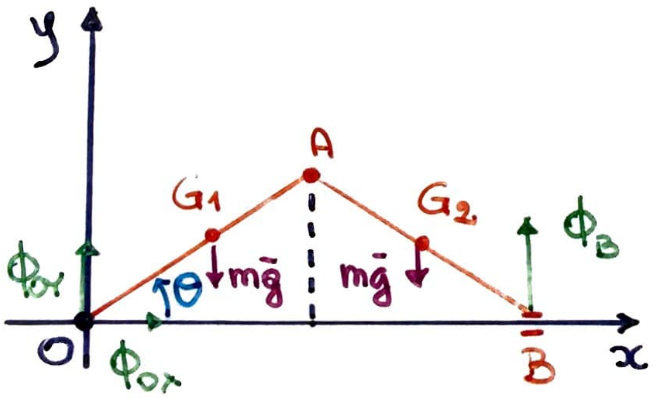
SVINCOLAMENTO STATICO

Per il calcolo delle reazioni vincolari tra parti rigide di un sistema articolato (r.v. INTERNE) bisogna spezzare il sistema nelle sue parti costituenti e applicare ad esse le equazioni cardinali della statica (o dinamica)

1) In un piano verticale Oxy si consideri un sist. mat. costituito da 2 aste uguali (m, 2ℓ) omogenee e pesanti, OA e AB, incernierate tra loro in A. L'estremo O è incernierato nell'origine del rif, l'estremo B è vincolato all'asse Ox. Vincoli lisci. Determinare le reazioni vincolari esterne e interne all'equilibrio.



sistema articolato

1 g. di l. $q = \theta \in [0, 2$

$$\begin{cases} \bar{R}^e + \bar{\Phi}^e = \bar{0} \\ \bar{\Omega}^e_O + \bar{\Psi}^e_O = \bar{0} \end{cases}$$

devo avere un n° di eq. = n° incognite del pb.

Per il sistema:

$$\begin{cases} \phi_{Ox} = 0 \\ \phi_{Oy} - 2mg + \phi_B = 0 \end{cases}$$

$$-mgl\cos\theta - 3mgl\cos\theta + 4l\cos\theta\,\phi_B = 0$$

$$\cos\theta\,(\phi_B - mg) = 0$$

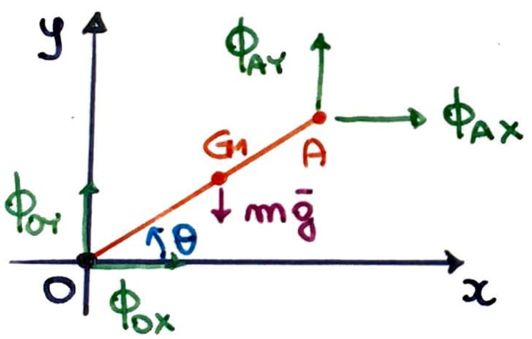
o $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta_e = \pm\pi/2$ e ϕ_B indeterminato

o $\phi_B = mg$ e θ_e indeterminato.

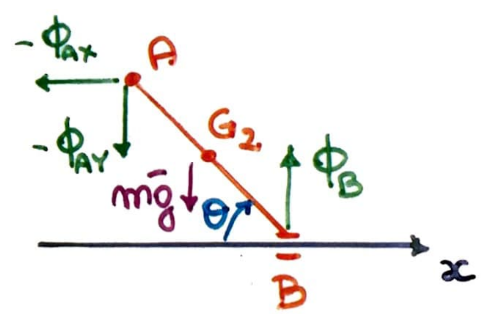
1) $\theta_e = \pm\pi/2$, ϕ_B indet. e $\bar{\phi}_O = (0,\ 2mg - \phi_B)$

2) θ_e indet., $\phi_B = mg$ e $\bar{\phi}_O = (0,\ mg)$

Per il calcolo di ϕ_A bisogna spezzare il sistema:



oppure



e applicare $\begin{cases} \bar{R}^e + \bar{\phi}^e = \bar{0} \\ \bar{\Omega}^e_P + \bar{\Psi}^e_P = \bar{0} \end{cases}$ ad OA o ad AB

se considero l'asta $\overline{OA}$:

$$\phi_{OX} + \phi_{AX} = 0 \Rightarrow \phi_{AX} = 0$$

$$\phi_{OY} + \phi_{AY} - mg = 0 \Rightarrow \phi_{AY} = mg - \phi_{OY}$$

1) $\bar{\phi}_A\,(0,\ \phi_B - mg)$

2) $\bar{\phi}_A\,(0,0)$

Ma all' equilibrio deve essere verificata anche la seconda eq. cardinale della statica riferita all' asta OA

Scelto come polo il punto A si ha:

$$(G_1 - A) \times m\bar{g} + (O - A) \times \bar{\Phi}_0 = \bar{0}$$

so già che $\Phi_{0x} = 0$

$$+ mg\ell\cos\theta - \Phi_{0y} 2\ell\cos\theta = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\ell\cos\theta\,(mg - 2\Phi_{0y}) = 0$$

1) $\theta_e = \pm\pi/2 \Rightarrow \Phi_{0y}$ è indeterminato ok!

2) $\theta_e \neq \pm\pi/2 \Rightarrow \Phi_{0y} = \frac{1}{2}mg$ ma prima avevo trovato $\Phi_{0y} = mg$ $\lightning$

$\Rightarrow$ il caso 2) cioè θ_e indeterminato non è accettabile.

Calcoliamo le posizioni di equilibrio col metodo della stazionarietà del potenziale.

$$U = U(\theta) = -mg\,y_{G_1} - mg\,y_{G_2} + c$$

$$= -2mg\ell\sin\theta + c$$

$$\frac{dU}{d\theta} = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta_e = \pm\pi/2$$

se poi calcolo la $\frac{d^2U}{d\theta^2}$ ottengo:

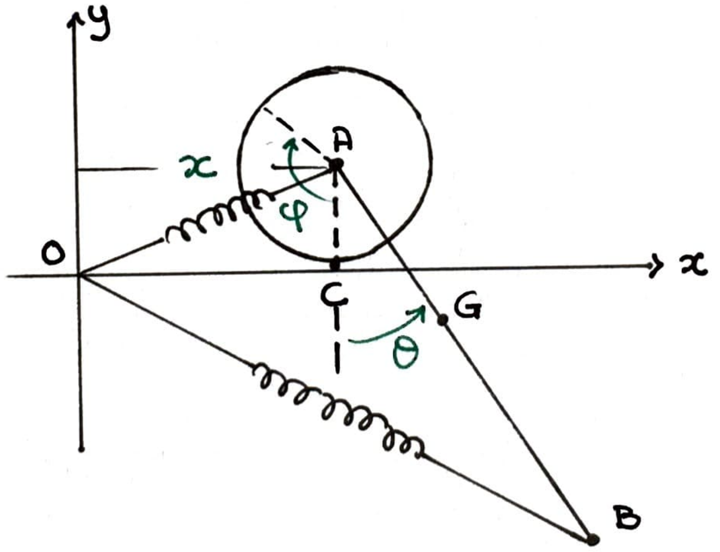
$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = 2mg\ell\,\mathrm{sen}\,\theta \begin{cases} <0 \text{ se } \theta_e = -\pi/2 \text{ max} \Rightarrow \text{min. per } V \\ >0 \text{ se } \theta_e = \pi/2 \text{ min.} \Rightarrow \text{max per } V \end{cases}$$

$\theta_e = -\pi/2$ min per $V \Rightarrow$ è un centro $\Rightarrow$ STABILE

$\theta_e = \pi/2$ max per $V \Rightarrow$ è una sella $\Rightarrow$ INSTABILE

2) In un piano verticale Oxy si consideri un sist. mat. costituito da un disco omogeneo, di massa m e raggio R e da un'asta omogenea AB, di massa m e lunghezza $4R$. Il disco rotola senza strisciare su Ox, l'asta ha l'estremo A incernierato nel centro del disco. Oltre alle forze peso sul sistema agiscono due forze elastiche $\vec{F}_A = -k_1(A-O)$ con $k_1 = mg/3R$ e $\vec{F}_B = -k_2(B-O)$ con $k_2 = mg/R$, applicate all'asta AB.

Determinare le reazioni vincolari esterne e interne all'equilibrio.



sistema articolato con 2 g. di libertà

$q_1 = x_G = x_A = x, x \in \mathbb{R}$ oppure $q_1 = \varphi$ angolo di rot. del disco

La condizione di rot. senza strisciamento

$\Rightarrow \dot{x} = R\dot{\varphi} \Rightarrow x = R\varphi + c$

È sempre possibile scegliere le c.i. in modo che la costante c sia nulla.

$q_2 = C\hat{A}B = \theta \quad \in [0, 2\pi)$

Le incognite del problema sono 6 : $x_e, \theta_e, \bar{\Phi}_C = (\phi_{CX}, \phi_{CY})$ e $\bar{\Phi}_A (\phi_{AX}, \phi_{AY})$

$\bar{\Phi}_C$ ↓ esterna

$\bar{\Phi}_A$ ↓ interna

Bisogna svincolare il sistema.

① considero le eq. cardinali della statica per l'intero sistema

② considero le eq. cardinali della statica per il disco.

①
$$\begin{cases} \bar{R}^e + \bar{\Phi}^e = \bar{0} \Rightarrow -k_2(B-O) - k_1(A-O) + \bar{\Phi}_C + 2m\bar{g} = \bar{0} \\ \bar{\Omega}^e_O + \bar{\Psi}^e_O = \bar{0} \Rightarrow (A-O)\times m\bar{g} + (C-O)\times \bar{\Phi}_C + (G-O)\times m\bar{g} = \bar{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -k_2 x_B - k_1 x_A + \phi_{CX} = 0 & 1) \\ -k_2 y_B - k_1 y_A + \phi_{CY} - 2mg = 0 & 2) \\ -mg\, x_A + \phi_{CY}\, x - mg\, x_G = 0 & 3) \end{cases}$$

② tolgo l'asta e la sostituisco con la reazione vincolare $\bar{\Phi}_A$:

$$\begin{matrix} \bar{R}^e + \bar{\Phi}^e = \bar{0} \\ \bar{\Omega}^e_A + \bar{\Psi}^e_A = \bar{0} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \bar{\Phi}_C + \bar{\Phi}_A + m\bar{g} = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} \phi_{CX} + \phi_{AX} = 0 & 4) \\ \phi_{CY} + \phi_{AY} - mg = 0 & 5) \end{cases} \\ \phi_{CX}\, y_A = 0 \quad 6) \end{cases}$$

$A(x, R)$

$B(x + 4R\sin\theta,\ -4R\cos\theta + R)$

$G(x + 2R\sin\theta,\ -2R\cos\theta + R)$

Da 6) $\boxed{\phi_{CX} = 0}$ $\Rightarrow$ da 4) $\boxed{\phi_{AX} = 0}$

⇓

da 1) $k_1 x + k_2 (x + 4R\sin\theta) = 0$

cioè $\left(\frac{mg}{3R}+\frac{mg}{R}\right)x + 4\frac{mg}{\cancel{R}}\cdot\cancel{R}\sin\theta = 0 \rightsquigarrow \boxed{x + 3R\sin\theta = 0}$ (A)

Da 2) $\phi_{CY} = 2mg + k_1 \cdot R + k_2(R - 4R\cos\theta)$

$$= 2mg + \frac{4}{3}\frac{mg}{\cancel{R}}\cdot\cancel{R} - 4mg\cos\theta$$

$$= \frac{10}{3}mg - 4mg\cos\theta$$

che sostituite in 3) fornisce

$$-mg\,x + \left(\frac{10}{3}mg - 4mg\cos\theta\right)x - mg\,(x + 2R\sin\theta) = 0$$

$$-x + \frac{10}{3}x - 4\cos\theta\, x - x - 2R\sin\theta = 0$$

$$\frac{4}{3}x - 4\cos\theta\, x - 2R\sin\theta = 0$$

$$\frac{4}{3}x(1 - 3\cos\theta) - 2R\sin\theta = 0$$

$$\boxed{2x(1 - 3\cos\theta) - 3R\sin\theta = 0}$$ (B)

A + B = sistema di 2 eq. in 2 incognite ; x e θ.

Da (A) $x = -3R\sin\theta$

$\Downarrow$

sostituite in (B)

$$-3R\sin\theta\cdot 2(1 - 3\cos\theta) - 3R\sin\theta = 0$$

$$-3R\sin\theta\,[2 - 6\cos\theta + 1] = 0$$

$$3R\sin\theta\,(3 - 6\cos\theta) = 0$$

$$9R\sin\theta\,(1 - 2\cos\theta) = 0$$

$\Downarrow$

$\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0\ ,\ \theta = \pi$

o

$\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \pi/3\ ,\ \theta = \frac{5}{3}\pi$

se $\theta = 0 \Rightarrow x = 0$

se $\theta = \pi \Rightarrow x = 0$

se $\theta = \pi/3 \Rightarrow x = -\frac{3\sqrt{3}}{2}R$

se $\theta = \frac{5}{3}\pi \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{3}}{2}R$

Esistono 4 posizioni di equilibrio (x_e, θ_e):

$(0,0)$; $(0, \pi)$; $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}R, \frac{\pi}{3}\right)$; $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}R, \frac{5}{3}\pi\right)$

Allora

$$\begin{cases} \Phi_{CY}(\theta = 0) = -\frac{2}{3}mg \\ \Phi_{CY}(\theta = \pi) = \frac{22}{3}mg \\ \Phi_{CY}(\theta = \pm\pi/3) = \frac{4}{3}mg \end{cases}$$

Dalla 5) ricaviamo $\Phi_{AY} = mg - \Phi_{CY}$ nelle 4 posiz. di eq.

$$\begin{cases} \Phi_{AY}(\theta = 0) = \frac{5}{3}mg \\ \Phi_{AY}(\theta = \pi) = -\frac{19}{3}mg \\ \Phi_{AY}(\theta = \pm\pi/3) = -\frac{mg}{3} \end{cases}$$

Con il metodo della stazionarietà del potenziale.

Vantaggio: • determino le posizioni di equilibrio senza far intervenire le reazioni vincolari

• uso le eq. cardinali andando a sostituire ad $(x, \theta) \to (x_e, \theta_e)$ e quindi utilizzo solo 4 eq. scalari
$\bar{R}^e + \bar{\Phi}^e = \bar{0}$ per il sistema
$\bar{R}^e + \bar{\Phi}^e = \bar{0}$ per il disco.

Svantaggio: $U = U(x, \theta)$ e quindi devo ricordarmi come si calcolano i pti di stazionarietà di una funzione in due variabili $\Rightarrow$ non è uno svantaggio!!

$$U = -mg \underbrace{y_A}_{= R} - mg\, y_G - \frac{1}{2} k_1 \overline{AO}^2 - \frac{1}{2} k_2 \overline{BO}^2 + c$$

$$\overline{AO}^2 = x^2 + R^2$$
$$\overline{BO}^2 = x^2 + 8R\, x \sin\theta + 16R^2 + R^2 - 8R^2\cos\theta$$
$$\Rightarrow U = -mg(-2R\cos\theta) - \frac{1}{2} k_1 (x^2) - \frac{1}{2} k_2 (x^2 + 8R\, x\sin\theta - 8R^2\cos\theta) + c$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -k_1 x - k_2 x - 4k_2 R\sin\theta$$
$$= -(k_1 + k_2)x - 4k_2 R \sin\theta$$
$$= -\left(\frac{mg}{3R} + \frac{mg}{R}\right)x - 4 \cdot \frac{mg}{\cancel{R}} \cancel{R} \sin\theta$$
$$= -\frac{4}{3}\frac{mg}{R} x - 4mg\sin\theta = -\frac{4mg}{3R}(x + 3R\sin\theta)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -2mgR\sin\theta - 4k_2 R\, x\cos\theta - k_2 4R^2 \sin\theta$$
$$= -2mgR\sin\theta - 4mg\, x\cos\theta - 4mgR\sin\theta$$
$$= -2mg(R\sin\theta + 2x\cos\theta + 2R\sin\theta)$$
$$= -2mg(3R\sin\theta + 2x\cos\theta)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_e, \theta_e)$$

$$\begin{cases} x + 3R\sin\theta = 0 \\ 3R\sin\theta + 2x\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$x = -3R\sin\theta$$

$$\downarrow$$

$$3R\sin\theta - 6R\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$3R\sin\theta\,(1 - 2\cos\theta) = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0 \quad \theta = 0,\ \theta = \pi$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \theta = \pm \pi/3$$

$$\theta = 0 \mapsto x = 0$$

$$\theta = \pi \mapsto x = 0$$

$$\theta = \pi/3 \mapsto x = -\frac{3\sqrt{3}}{2}R$$

$$\theta = -\pi/3 \mapsto x = +\frac{3\sqrt{3}}{3}R$$

$$\Rightarrow (0,0);\ (0,\pi);\ \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}R, \frac{\pi}{3}\right);\ \left(\frac{3\sqrt{3}}{3}R, -\pi/3\right)$$