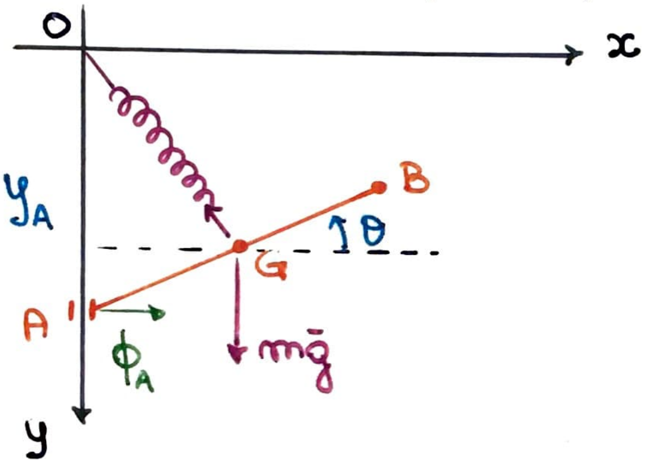
- EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL MOTO
- EQUILIBRIO E STABILITÀ
- PICCOLE OSCILLAZIONI
- INTEGRALI PRIMI DI MOTO
- ESERCIZI TIPO ESAME

Esercizio 1 In un piano verticale Oxy è mobile un'asta $\overline{AB}$ omogenea e pesante $(m, 2\ell)$ avente l'estremo A scorrevole senza attrito su Oy e il baricentro G richiamato in O da una molla ideale. Deter:

1) eq. diff. di moto
2) pos. di eq. e stabilità $(k = mg/\ell)$
3) pulsazioni principali



vincoli fissi e lisci

f. attive conservative

2 g. di libertà:

$q_1 = y_A = y \in \mathbb{R}$

$q_2 = \theta \qquad \theta \in [0, 2\pi)$

$\mathcal{L} = T + \mathcal{U}$

2) $\mathcal{U} = mg\, y_G - \frac{1}{2} k \overline{GO}^2 + c$

$= mg(y - \ell \operatorname{sen}\theta) - \frac{1}{2} k \left[(y - \ell \operatorname{sen}\theta)^2 + (\ell \cos\theta)^2 \right] + c$

$= mg(y - \ell \operatorname{sen}\theta) - \frac{1}{2} k (y^2 - 2\ell \operatorname{sen}\theta\, y) + c$

$$\begin{cases} \mathcal{U}_y = mg - k(y - \ell \operatorname{sen}\theta) = 0 \\ \mathcal{U}_\theta = -mg\ell\cos\theta + k\ell y \cos\theta = \ell(ky - mg)\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$\cos\theta = 0$ oppure $y = mg/k = \ell$

$\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pm\pi/2$

$\theta = \pi/2 \quad \ell - y + \ell = 0 \Rightarrow y = 2\ell$

$\theta = -\pi/2 \quad \ell - y - \ell = 0 \Rightarrow y = 0$

$y = \ell \quad \operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0,\ \theta = \pi$

$(0, \frac{3}{2}\pi)$; $(2\ell, \pi/2)$; $(\ell, 0)$; (ℓ, π) 4 posiz. di equilibrio

$$\begin{cases} U_{yy} = -k < 0 \quad \text{sempre} \\ U_{y\theta} = U_{\theta y} = k\ell\cos\theta \\ U_{\theta\theta} = -\ell(ky - mg)\sin\theta \end{cases}$$

$$\mathcal{H} = k\ell(Ky - mg)\sin\theta - k^2\ell^2\cos^2\theta > 0$$

$k = mg/\ell$

$\mathcal{H}(0, \frac{3}{2}\pi) = k\ell mg > 0 \Rightarrow$ STABILE

$\mathcal{H}(2\ell, \frac{\pi}{2}) = k\ell(2k\ell - mg) = k\ell mg > 0$ STABILE

$\mathcal{H}(\ell, 0) = -k^2\ell^2 < 0 \Rightarrow$ INSTABILE

$\mathcal{H}(\ell, \pi) = -k^2\ell^2 < 0 \Rightarrow$ INSTABILE

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + T' \quad , \quad T' = \frac{1}{2} I_{Gz}\omega^2$$

$$\begin{cases} x_G = \ell\cos\theta \\ y_G = y - \ell\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_G = -\ell\sin\theta\,\dot\theta \\ \dot{y}_G = \dot{y} - \ell\cos\theta\,\dot\theta \end{cases}$$

$$v_G^2 = \ell^2\dot\theta^2 + \dot{y}^2 - 2\ell\cos\theta\,\dot{y}\,\dot\theta$$

$$I_{Gz} = \frac{1}{12} m \cdot 4\ell^2 = \frac{1}{3} m\ell^2$$

$$\omega^2 = \dot\theta^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m \left[\dot{y}^2 - 2\ell\cos\theta\,\dot{y}\,\dot\theta + \frac{4}{3}\ell^2\dot\theta^2\right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m(\dot{y} - \ell\cos\theta\,\dot\theta) \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

$$m(\ddot{y} - \ell\cos\theta\,\ddot\theta + \ell\sin\theta\,\dot\theta^2) - mg + k(y - \ell\sin\theta) = 0$$

$$\ddot{y} - \ell\cos\theta\,\ddot\theta + \ell\sin\theta\,\dot\theta^2 - g + g/\ell\,(y - \ell\sin\theta) = 0$$ 1ª eq. diff. del moto

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = m\left(\frac{4}{3}\ell^2\dot\theta - \ell\cos\theta\,\dot{y}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = m\,(l \operatorname{sen}\theta\, \dot{y}\, \dot{\theta})$$

$$\bullet\ \cancel{m}\left(\frac{4}{3} l^2 \ddot{\theta} - l\cos\theta\, \ddot{y}\right) \overbrace{- \cancel{m}g\,(y-l)\cos\theta}^{-\frac{\partial U}{\partial \theta}} = 0$$ 2ª eq. diff. del moto

3) Bisogna determinare $\mathcal{L}_a = T_a + U_a$.

$T_a = T$(eq. stabile).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_a}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}_a}{\partial q_i} = 0$$

A scelta $\underline{\underline{\left(0, \frac{3}{2}\pi\right)}}$ o $(2l, \pi/2)$.

$$T_a\left(0, \tfrac{3}{2}\pi\right) = \frac{1}{2}\left[m\dot{y}^2 + \frac{4}{3} m l^2 \dot{\theta}^2\right]$$

$$U_a = \frac{1}{2}\left[(-mg/l)\, y^2 + (-mgl)\left(\theta - \tfrac{3}{2}\pi\right)^2\right]$$

$$\begin{cases} m\ddot{y} + mg/l\; y = 0 \\ \frac{4}{3} m l^2 \ddot{\theta} + mgl\,\theta = -\frac{3}{2} mgl\pi \end{cases}$$

eq. piccoli moti

$\Rightarrow \omega_1^2 = g/l$

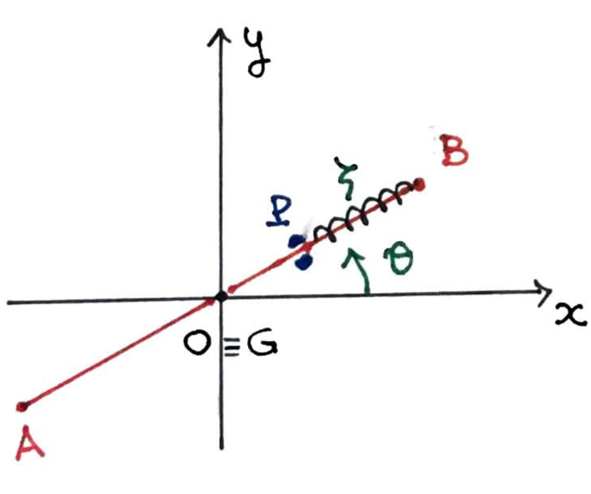
$\Rightarrow \omega_2^2 = \frac{3}{4} g/l$

pulsazioni principali

Esercizio 2

Riprendiamo es. 3 del §. Principio dei lavori virtuali.

Sistema: $\overline{AB}$: m, $2l$ + (P, m)



$q_1 = \theta \quad \theta \in [0, 2\pi)$

$q_2 = \xi_P = \xi \qquad \xi = |P-B| \in [0, 2l]$

- molla è forza interna

$P\big((l-\xi)\cos\theta,\ (l-\xi)\sin\theta\big)$

Riferendoci a questo esercizio, determinare:

1) la stabilità delle posizioni di eq. ordinarie
2) le equazioni differenziali del moto
3) la reazione vincolare dinamica in O, nell'istante $t=0$ in cui $P \equiv B$, $B=(l,0)$ e lo stato cinetico è nullo.

1) Per lo studio della stabilità dobbiamo applicare il th. di Dirichlet.

$$U = -mg(l-\xi)\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}K\xi^2 + c$$

$$\begin{cases} U_\xi = Q_\xi = mg\left(\operatorname{sen}\theta - \frac{\lambda}{l}\xi\right) = 0 \\ U_\theta = Q_\theta = -mg(l-\xi)\cos\theta = 0 \end{cases}$$

ci ha fornito le soluzioni:

(l, θ_1) ; $(l; \pi-\theta_1)$ con $\theta_1 = \arcsin\lambda$
$\exists\ 0 < \lambda \leq 1$

$\left(\frac{l}{\lambda}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\exists\ \lambda > \frac{1}{2}$

$U_{\xi\xi} = -\frac{\lambda}{l}mg < 0$ sempre

$U_{\xi\theta} = mg\cos\theta = U_{\theta\xi}$

$U_{\theta\theta} = mg(l-\xi)\operatorname{sen}\theta$

$$\mathcal{H}(\xi,\theta) = \begin{vmatrix} U_{\xi\xi} & U_{\xi\theta} \\ U_{\xi\theta} & U_{\theta\theta} \end{vmatrix}$$

Affinchè una pos. di eq. sia stabile: (massimo per U)

1) $U_{\xi\xi}|_{eq} < 0$

2) $|\mathcal{H}|(\xi,\theta)\,|_{eq} > 0$

$$|\mathcal{H}|(\xi,\theta) = -\frac{\lambda}{\ell}\, m^2 g^2 (\ell-\xi)\,\text{sen}\,\theta - m^2 g^2 \cos^2\theta$$

- In (ℓ, θ_1) e $(\ell, \pi-\theta_1)$

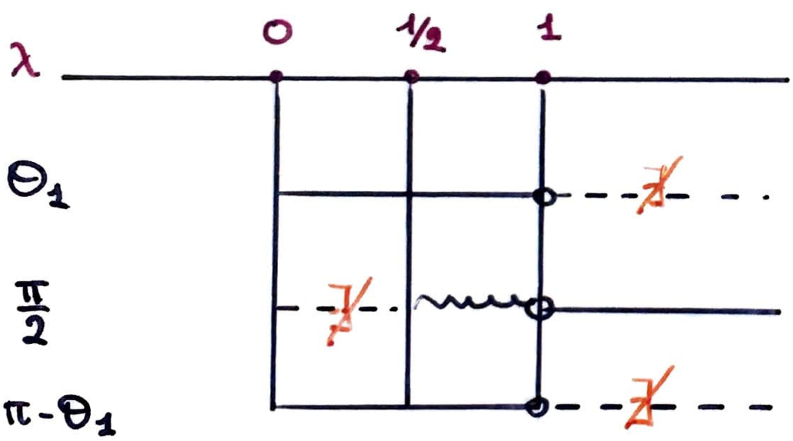
$|\mathcal{H}| = -m^2 g^2 \cos^2\theta_1 < 0 \Rightarrow$ INSTABILI

In $\left(\frac{\ell}{\lambda}, \pi/2\right)$

$|\mathcal{H}| = -m^2 g^2 (\lambda - 1) > 0$ se $\lambda < 1$

$\Rightarrow$ STABILE se $\frac{1}{2} < \lambda < 1$ e se $\lambda > 1$ è instabile

Per $\lambda = 1$ $|\mathcal{H}| = 0$? e $\theta_1 \equiv \theta_2 \equiv \pi/2$



$\lambda = 1$ punto di biforcazione INSTABILE

2) Utilizziamo la Meccanica Analitica.
Poichè i vincoli sono lisci e fissi e le forze attive sono conservative possiamo scrivere

$\mathcal{L} = T + U$ e le eq. di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

$$T = T_{OA} + T_P = \frac{1}{2}\,\frac{m\,4l^2}{12}\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\,m v_P^2$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{m l^2}{3}\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\,m\left[\dot{\xi}^2 + (l-\xi)^2\dot{\theta}^2\right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = m\dot{\xi} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \xi} = -m(l-\xi)\dot{\theta}^2$$

- $$m\ddot{\xi} + m(l-\xi)\dot{\theta}^2 + \overbrace{mg\frac{\lambda}{l}\xi - mg\,\mathrm{sen}\,\theta}^{-\frac{\partial U}{\partial \xi}} = 0$$

1ª eq. diff. di moto

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m\left[(l-\xi)^2 + \frac{l^2}{3}\right]\dot{\theta} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

- $$m\left[(l-\xi)^2 + \frac{l^2}{3}\right]\ddot{\theta} - 2m(l-\xi)\dot{\xi}\dot{\theta} + \overbrace{mg(l-\xi)\cos\theta}^{-\frac{\partial U}{\partial \theta}} = 0$$

2ª eq. diff. di moto

3) Bisogna utilizzare le eq. cardinali:
Le condizioni iniziali sono:

$$\begin{cases}\xi(0) = 0\\ \theta(0) = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}\dot{\xi}(0) = 0\\ \dot{\theta}(0) = 0\end{cases}$$

- le 2 eq. di moto per $t=0$:

$$\begin{cases} m\ddot{\xi}(0) = 0\\ m\frac{4}{3}l^2\ddot{\theta}(0) + mgl = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\ddot{\xi}(0) = 0\\ \ddot{\theta}(0) = -\frac{3}{4}\,g/l\end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{Q} = \bar{R}^e + \bar{\Phi}^e$$ la molla è forza interna

$$\cancel{m\underbrace{\bar{a}_G}_{=0}} + m\bar{a}_P = 2m\bar{g} + \bar{\Phi}_0$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_P = \Phi_{Ox} \\ m\ddot{y}_P = -2mg + \Phi_{OY} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_P = (l-\xi)\cos\theta \\ y_P = (l-\xi)\sin\theta \end{cases}$$ calcolando $\ddot{x}_P$ e $\ddot{y}_P$ e valutandole in $t=0$ si ha:

$$\ddot{x}_P(0) = 0 \qquad \ddot{y}_P(0) = l\,\ddot{\theta}(0) = -\frac{3}{4}g$$

$$\Rightarrow \bar{\Phi}_O(t=0) = \left(0, \frac{5}{4}mg\right).$$

4) Calcolare le pulsazioni principali delle piccole oscillazioni nell'ipotesi $\lambda = \frac{3}{4}$

P. eq. stabile è $\left(\frac{4}{3}l, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\mathcal{L}_a = T_a + U_a$$

$$T_a = T\left(\frac{4}{3}l, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\overset{a_{11}}{\overset{\shortparallel}{m}}\dot{\xi}^2 + \overset{a_{22}}{\overset{\shortparallel}{\frac{4}{9}ml^2}}\dot{\theta}^2\right]$$

$$U_a = \frac{1}{2}\left[U_{\xi\xi}\big|_{eq}\left(\xi - \frac{4}{3}l\right)^2 + 2U_{\xi\theta}\big|_{eq}\left(\xi - \frac{4}{3}l\right)\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + U_{\theta\theta}\big|_{eq}\left(\theta - \pi/2\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\overset{-c_{11}}{\overset{\shortparallel}{\left(-\frac{3}{4}mg/l\right)}}\left(\xi - \frac{4}{3}l\right)^2 + \overset{-c_{22}}{\overset{\shortparallel}{\left(-\frac{1}{3}mgl\right)}}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)^2\right]$$

poiché $T_{12} = T_{21} = 0$ e $U_{12} = U_{21} = 0$ le 2 eq. sono disaccoppiate.

o applico le eq. di Lagrange ad $\mathcal{L}_a = T_a + U_a$

oppure utilizzo la formula $\det \| T_{ij}\omega^2 + U_{ij} \| = 0$

$$\begin{vmatrix} \underbrace{(m\omega^2 - \frac{3}{4} mg/\ell)}_{=A} & 0 \\ 0 & \overbrace{(\frac{4}{9} m\ell^2\omega^2 - \frac{1}{3} mg\ell)}^{=B} \end{vmatrix} = 0$$

$A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0 \quad o \quad B = 0$

$\omega_1^2 = \frac{3}{4} g/\ell \quad ; \quad \omega_2^2 = \frac{3}{4} g/\ell$ pulsazioni principali

Con le eq. di Lagrange:

$1 \cdot \ddot{x} + \omega^2 x = c$

$$\begin{cases} m\ddot{\xi} + \frac{3}{4} mg/\ell \left(\xi - \frac{4}{3}\ell\right) = 0 \\ m\frac{4}{9}\ell^2\ddot{\theta} + mg\frac{\ell}{3}\left(\theta - \pi/2\right) = 0 \end{cases}$$

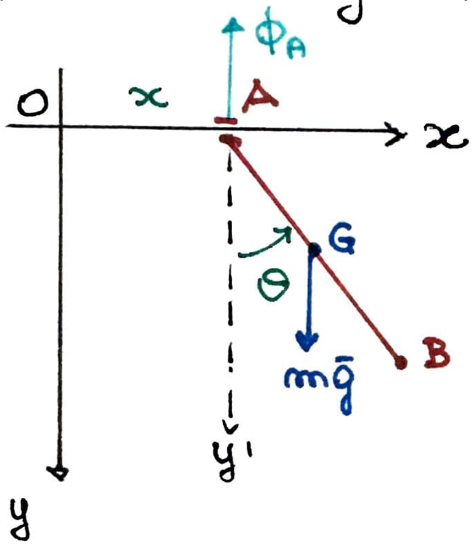
si ha:

$$\ddot{\xi} + \underbrace{\frac{3}{4} g/\ell}_{\omega_1^2}\,\xi = g \quad e \quad \ddot{\theta} + \underbrace{\frac{3}{4} g/\ell}_{\omega_2^2}\,\theta = \frac{3}{8}\pi\, g/\ell$$

INTEGRALI PRIMI

In un piano verticale Oxy è mobile un'asta AB omogenea e pesante, di massa m e lunghezza 2ℓ, avente l'estremo A scorrevole senza attrito su Ox.

Determinare gli integrali primi di moto.



- vincoli lisci e fissi e bilat.
- forza attiva conservativa

2 gradi di libertà:

$$\begin{cases} q_1 = x_A = x \in \mathbb{R} \\ q_2 = y'\hat{A}B = \theta \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

- $\bar{\phi}_A = \phi_A \bar{J}$ modulo e verso incogniti
- $\vec{\omega} = -\dot{\theta}\vec{K}$

$\mathcal{L} = T + \mathcal{U}$

$\mathcal{U} = mg\, y_G + c = mg\, \ell \cos\theta + c$

$\mathcal{U}$ dipende da θ, ma non da x.

$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + T'$, $\quad T' = \frac{1}{2} I_{Gz} \omega^2$, $\quad I_{Gz} = \frac{m\ell^2}{3}$

$$\begin{cases} x_G = x + \ell \sin\theta \\ y_G = \ell\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_G = \dot{x} + \ell\cos\theta\, \dot{\theta} \\ \dot{y}_G = -\ell \sin\theta\, \dot{\theta} \end{cases}$$

$v_G^2 = \dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\cos\theta\, \dot{x}\dot{\theta}$

$T = \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 + 2\ell\cos\theta\, \dot{x}\dot{\theta} + \frac{4}{3}\ell^2\dot{\theta}^2 \right]$

T non dipende da x.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \text{costante}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\,(\dot{x} + l\cos\theta\,\dot{\theta}) = \text{cost}$$

$\Rightarrow \quad \underline{\dot{x} + l\cos\theta\,\dot{\theta} = c}$ 1° integrale primo di moto

che corrisponde alla conservazione della quantità di moto lungo l'asse Ox, ovvero la conservazione della componente $\dot{x}_G$ della velocità del baricentro, poiché $q_1 = x$ rappresenta una lunghezza

La costante "c" si determina con le condizioni iniziali.

Per le ipotesi del problema, vale anche il teorema di conservazione dell'energia meccanica, cioè:

$$T + V = E \quad , \quad V = -U$$

$$\underline{\frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + 2l\cos\theta\,\dot{x}\,\dot{\theta} + \frac{4}{3} l^2 \dot{\theta}^2 \right) - mgl\cos\theta = E}$$

2° integrale primo di moto

dove $E = T_0 + V_0$ si determina con le condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \\ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \end{cases}$$