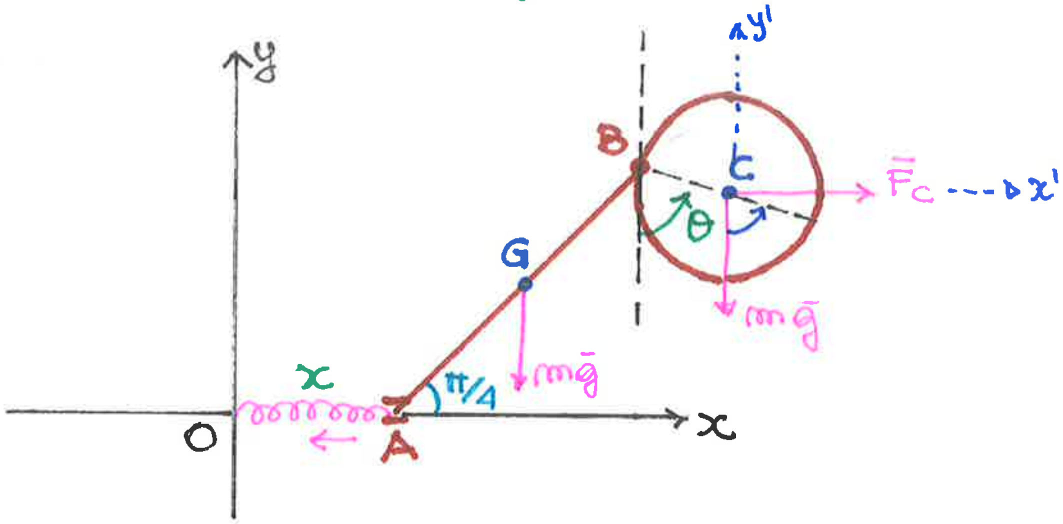
Esercizio 1

In un piano verticale Oxy si considera un sistema materiale pesante costituito da un'asta omogenea AB, di massa m e lunghezza $2L$ e da un disco omogeneo $\mathcal{D}$, di massa m e raggio R.

L'asta ha l'estremo A scorrevole su Ox, ha l'estremo B incernierato in un punto del bordo del disco ed è vincolata a formare un angolo costante $\alpha = \pi/4$ con Ox^+. Il disco è libero di oscillare attorno a B.

Oltre alle forze peso sul sistema agiscono una forza elastica $\bar{F}_A = -k(A-O)$, $k = mg/L$ e una forza costante $\bar{F}_C = mg\,\bar{i}$.



sistema a vincoli olonomi, fissi, bilateri, soggetto a forze conservative con 2 gradi di libertà:

$q_1 = x_A = x \in \mathbb{R}$

$q_2 = \theta \in [0, 2\pi)$

$G\hat{A}x^+ = \pi/4$ costante

Reazione vincolare esterna in A: si esplica con

$\bar{\Phi}_A = \Phi_A \bar{J}$ modulo e verso incogniti

$\stackrel{+}{\bar{M}} = M \bar{k}$ coppia di momento incognito

Reazione vincolare interna in B: cerniera:

$\bar{\Phi}_B = \Phi_{Bx} \bar{\imath} + \Phi_{BY} \bar{J}$

per determinare $\bar{\Phi}_B$ bisogna svincolare il sistema.

PUNTI NOTEVOLI

A $(x, 0)$

G $\left(x + L\frac{\sqrt{2}}{2};\ L\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

B $(x + L\sqrt{2};\ L\sqrt{2})$

C $(x + L\sqrt{2} + R\sin\theta;\ L\sqrt{2} - R\cos\theta)$

Forze attive conservative $\Rightarrow \exists$ potenziale $\mathcal{U}$:

① $\mathcal{U} = \underset{\substack{\| \\ \text{cost}}}{-mg\,y_G} - mg\,y_C - \frac{1}{2}k\,\overline{AO}^2 + mg\,x_C + c$

$= mgR\cos\theta - \frac{1}{2}kx^2 + mg(x + R\sin\theta) + c$

$$\begin{cases} \mathcal{U}_x = -kx + mg = 0 \Rightarrow x_e = L \\ \mathcal{U}_\theta = -mgR\sin\theta + mgR\cos\theta = 0 \Rightarrow tg\,\theta = 1 \end{cases}$$

$\theta_1 = \pi/4,\ \theta_2 = \frac{5}{4}\pi$

② $\Rightarrow (L, \pi/4); (L, 5/4\,\pi)$ posiz. di equilibrio

$\mathcal{U}_{xx} = -k < 0$ sempre

$\mathcal{U}_{x\theta} = \mathcal{U}_{\theta x} \equiv 0$

$$\mathcal{U}_{\theta\theta} = -mgR\cos\theta - mgR\sin\theta$$

$$= -mgR(\sin\theta + \cos\theta)$$

$$= -mgR\cos\theta(\underbrace{tg\,\theta}_{=1} + 1) = -2\,mgR\cos\theta_e \begin{cases} -\sqrt{2}\,mgR & \pi/4 \\ +\sqrt{2}\,mgR & 5/4\,\pi \end{cases}$$

$\Rightarrow (L, \pi/4)$ stabile

③ $(L, 5/4\,\pi)$ instabile

Reazioni vincolari all'equilibrio:

- $\bar{R}^e + \bar{\Phi}^e = \bar{0}$

proiettate su Oy: $-mg - mg + \phi_A = 0 \Rightarrow \phi_A = 2mg$

$\Rightarrow \bar{\phi}_A = 2mg\,\bar{j}$

- $\bar{\Omega}^e_P + \bar{\Psi}^e_P = \bar{0}$ scelto come polo $P \equiv A$ ↺ +

$$(G-A)\times m\bar{g} + (C-A)\times m\bar{g} + (C-A)\times \bar{F}_c + \bar{M} = \bar{0}$$

$$-L\frac{\sqrt{2}}{2}mg - (L\sqrt{2} + R\sin\theta)mg - mg(L\sqrt{2} - R\cos\theta) + M = 0$$

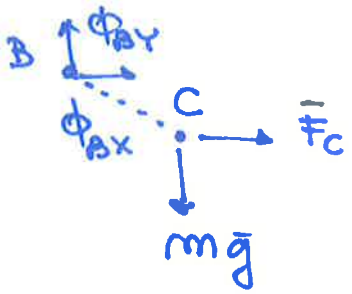
$$\Rightarrow M = mg\left[\frac{5}{2}L\sqrt{2} + \cancel{R\cos\theta(\underbrace{tg\,\theta}_{=1} - 1)}\right]$$

$$= \frac{5}{2}mgL\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \bar{M} = \frac{5\sqrt{2}}{2}mgL\,\bar{k}$$

④ in A : $\begin{cases} \bar{\phi}_A = 2mg\,\bar{j} \\ \bar{M} = \frac{5}{2}\sqrt{2}\,mgL\,\bar{k} \end{cases}$

Reazione vincolare interna: svincolo il sistema e considero per esempio il disco.



$\bar{R}^e + \bar{\Phi}^e = \bar{0}$ per il disco

$$\begin{cases} \Phi_{Bx} + mg = 0 \\ \Phi_{BY} - mg = 0 \end{cases}$$

(5) $\bar{\Phi}_B = -mg\,\bar{i} + mg\,\bar{j}$

Energia cinetica

$T = T_{AB} + T_D$

L'asta trasla: tutti i punti hanno la stessa velocità

$$T_1 = \frac{1}{2} m v_G^2 = \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_c^2 + T' \quad , \quad T' = \frac{1}{2} I_{Cz} \omega^2$$

$$\begin{cases} \dot{x}_c = \dot{x} + R\cos\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y}_c = R\sin\theta\,\dot{\theta} \end{cases} \rightarrow v_c^2 = \dot{x}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + 2R\cos\theta\,\dot{x}\,\dot{\theta}$$

$$I_{Cz} = \frac{mR^2}{2} \quad ; \quad \bar{\omega}_D = +\dot{\theta}\,\bar{k}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 + 2R\cos\theta\,\dot{x}\,\dot{\theta} + \frac{3}{2} R^2 \dot{\theta}^2 \right]$$

$\Rightarrow$

(6) $$T_{TOT} = \frac{1}{2} m \left(2\dot{x}^2 + 2R\cos\theta\,\dot{x}\dot{\theta} + \frac{3}{2} R^2 \dot{\theta}^2 \right)$$

$$\mathcal{L} = T + U \qquad T = T(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}) \qquad U = U(x, \theta)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m(2\dot{x} + R\cos\theta\,\dot{\theta}) \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -kx + mg$$

• $m\left(2\ddot{x} + R\cos\theta\,\ddot{\theta} - R\sin\theta\,\dot{\theta}^2\right) + \frac{mg}{L}x - mg = 0$

1ª eq. diff. di moto

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m\left(R\cos\theta\,\dot{x} + \frac{3}{2}R^2\dot{\theta}\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = m\left(-R\sin\theta\,\dot{x}\dot{\theta}\right) - mgR\sin\theta + mgR\cos\theta$$

$$m\left(R\cos\theta\,\ddot{x} - R\sin\theta\,\dot{\theta}\dot{x} + \frac{3}{2}R^2\ddot{\theta}\right) + mR\sin\theta\,\dot{x}\dot{\theta} +$$

$$mgR\sin\theta - mgR\cos\theta = 0$$

• $R\cos\theta\,\ddot{x} + \frac{3}{2}R^2\ddot{\theta} + gR\sin\theta - gR\cos\theta = 0$

2ª eq. diff. di moto

(7) $$\begin{cases} 2\ddot{x} + R\cos\theta\,\ddot{\theta} - R\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + \frac{g}{L}x - g = 0 \\ \cos\theta\,\ddot{x} + \frac{3}{2}R\ddot{\theta} + g\sin\theta - g\cos\theta = 0 \end{cases}$$ eq. di Lagrange

Integrali primi di moto: per le ipotesi vale il th. di conservazione dell'energia meccanica.

(8) $T + V = E$, $V = -\mathcal{U}$ e $E = T_0 + V_0$.

Per calcolare le piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile devo trovare $\mathcal{U}_a$ e T_a.

$$T_a = T\left(L, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left[(2m)\dot{x}^2 + (2mR\cos\theta)\dot{x}\dot{\theta} + \left(\frac{3}{2}mR^2\right)\dot{\theta}^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{2m}_{T_{11}}\,\dot{x}^2 + \underbrace{2\left(+mR\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{T_{12}}\dot{x}\dot{\theta} + \underbrace{\frac{3}{2}mR^2}_{T_{22}}\,\dot{\theta}^2\Big]$$

$$\mathcal{U}_a = \frac{1}{2}\Big[(\mathcal{U}_{xx})_{eq}(x-x_e)^2 + 2\underbrace{(U_{x\theta})_{eq}}_{\equiv 0}(x-x_e)(\theta-\theta_e) + (U_{\theta\theta})_{eq}(\theta-\theta_e)^2 \Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\left(-\tfrac{mg}{L}\right)}_{= U_{11}} (x-L)^2 + \underbrace{\left(-\sqrt{2}\, mgR\right)}_{= U_{22}} \left(\theta - \tfrac{5}{4}\pi\right)^2 \Big]$$

Le pulsazioni principali si ricavano dall'equazione

$$\det | T_{iJ}\omega^2 + U_{iJ} | = 0$$

(9)
$$\begin{vmatrix} 2m\omega^2 - mg/L & +mR\frac{\sqrt{2}}{2}\omega^2 \\ +mR\frac{\sqrt{2}}{2}\omega^2 & \frac{3}{2}mR^2\omega^2 - \sqrt{2}\,mgR \end{vmatrix} = 0$$

sarà un'eq. del tipo:

$$A\omega^4 + B\omega^2 + C = 0$$

$$\omega^2 = t > 0$$

$$At^2 + Bt + C = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Per calcolare la reazione vincolare esterna in A in fase di moto

$$\frac{d}{dt}\bar{Q} = \bar{R}^e + \bar{\Phi}^e$$

proiettata su Oy:

$$M_{TOT}\, \ddot{y}_g = -2mg + \Phi_A$$

$$\parallel$$

$$m\underbrace{\ddot{y}_G}_{\equiv 0} + m\ddot{y}_C = m\ddot{y}_C$$

$$\phi_A(t) = 2mg + m\ddot{y}_c$$

$$\ddot{y}_c = R\sin\theta\,\ddot{\theta} + R\cos\theta\,\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \phi_A(t) = 2mg + mR\left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right)$$

Vogliamo calcolare $\phi_A(t=0)$ sapendo che per $t=0$

$x(0)=0 \qquad \dot{\theta}(0)=0$

$\theta(0)=\frac{\pi}{2} \qquad \dot{x}(0)=0$

$$\Rightarrow \phi_A(t=0) = 2mg + mR\,\ddot{\theta}(0)$$

$\ddot{\theta}(0)$ si ricava dalle equazioni di Lagrange valutate per $t=0$

$2\ddot{x}(0) - g = 0 \quad \Rightarrow \ddot{x}(0) = g/2$ (non serve)

$\frac{3}{2}R\,\ddot{\theta}(0) + g = 0 \quad \Rightarrow \ddot{\theta}(0) = -\frac{2}{3}g/R$

$$\Rightarrow \phi_A(t=0) = 2mg + mR\cdot\left(-\frac{2}{3}\,g/R\right) = 2mg - \frac{2}{3}mg$$

$$= \frac{4}{3}mg$$

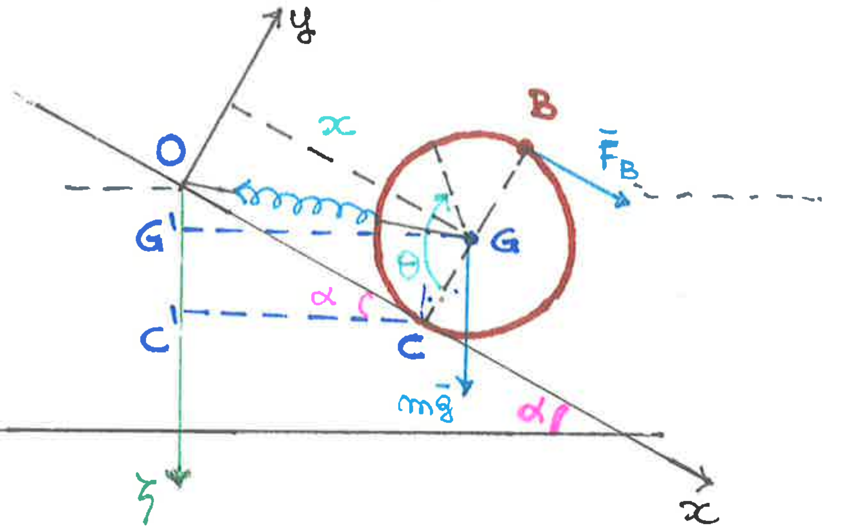
(10) $\Rightarrow \bar{\phi}_A(t=0) = \frac{4}{3}mg\,\vec{J}$

Esercizio 2

In un piano verticale si consideri un disco omogeneo e pesante vincolato a rotolare senza strisciare lungo un piano inclinato di un angolo costante α rispetto all'orizzontale. Oltre al peso sul disco agiscono una forza elastica applicata nel suo centro G:

$\bar{F}_G = -k(G-O)$ dove O è pto fisso del piano inclinato

e una forza $\bar{F}_B$ applicata in B, parallela al piano inclinato: $\bar{F}_B = mg\,\bar{i}$ (vedi figura) $(k = mg/R)$



C : c.i.r.

Sist. mat. olonomo a vincoli fissi e bilateri, soggetto a forze conservative con 1 grado di libertà:

$q_1 = x_G = x \in \mathbb{R}$. Il rotolamento senza strisciamento

$\Downarrow$

oppure

$\dot{x} = R\dot{\theta}$

$q_1 = \theta \in [0, 2\pi)$

$\Downarrow$

$x = R\theta + c$

E' possibile scegliere le c.i. in modo che c sia nulla.

① Potenziale delle forze attive

Forza $\bar{F}_B$

$$dL = \bar{F}_B \cdot \bar{v}_B\, dt = \bar{F}_B \cdot (\underbrace{\bar{v}_C}_{=0} + \bar{\omega}_D \times (B-C))\, dt$$

$$\bar{\omega}_D = -\dot{\theta}\,\bar{k}$$

$$dL = mg\,\bar{i} \cdot (-\dot{\theta}\,\bar{k} \times 2R\,\bar{j})\,dt = mg\,\bar{i} \cdot 2R\dot{\theta}\,\bar{i}\,dt = 2mgR\,d\theta$$

$$U = \int dU = \int dL = 2mgR \int d\theta = 2mgR\theta + c = 2mgx + c$$

Forza $\bar{F}_G$

$$U = -\frac{1}{2}k\,\overline{GO}^2 = -\frac{1}{2}k(x^2 + R^2) = -\frac{1}{2}kx^2 + c$$

Peso

$$U = mg\,\xi_G + c \qquad \text{(+ perchè la forza peso ha il verso di } \xi\text{)}$$

$$\xi_G = \overline{OC'} - \overline{G'C'} = x\sin\alpha - R\cos\alpha$$

$$U = mg\,x\sin\alpha + c$$

$$\Rightarrow \mathcal{U} = -\frac{1}{2}\,{}^{mg}/_{R}\,x^2 + mgx\sin\alpha + 2mgx + c$$

$$\frac{dU}{dx} = -{}^{mg}/_{R}\,x + mg\sin\alpha + 2mg = 0$$

(2) $\Rightarrow x_e = R(2 + \sin\alpha)$

se per esempio $\boxed{\alpha = \pi/6} \Rightarrow x_e = \frac{5}{2}R$

(3) $\frac{d^2U}{dx^2} = -{}^{mg}/_{R} < 0 \Rightarrow x_e$ è stabile

L'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} I_{Cz}\,\omega^2 \quad , \quad I_{Cz} = I_{Gz} + mR^2 = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

(4) $T = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} mR^2\,\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} m\,\dot{x}^2 = \frac{3}{4} m\,\dot{x}^2$

$\mathcal{L} = T + U$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{3}{2} m \dot{x} \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{mg}{R} x + \frac{5}{2} mg$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} m \ddot{x} + \frac{mg}{R} x - \frac{5}{2} mg = 0$$

(5) $\ddot{x} + \underbrace{\frac{2}{3}\frac{g}{R}}_{\omega^2} x = \frac{5}{3} g$ eq. diff. del moto

che può essere integrata

$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + \frac{5}{2} R$ con A e φ da determinare con le c.i.

Per le piccole oscillazioni

$\mathcal{L}_a = T_a + U_a$

$$T_a = T\left(\frac{5}{2}R\right) = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{3}{2} m\right)}_{= T_{11}} \dot{x}^2$$

$$U_a = \frac{1}{2} \underbrace{\left(-\frac{mg}{R}\right)}_{= U_{11}} \left(x - \frac{5}{2} R\right)^2$$

(6) $\frac{3}{2} m \ddot{x} + \frac{mg}{R}\left(x - \frac{5}{2} R\right) = 0 \equiv$ eq. diff. del moto

Reazioni vincolari all'equilibrio: solo in G totalmente incognita $\Rightarrow \bar{\Phi}_c = \phi_{cx} \bar{i} + \phi_{cy} \bar{j}$

$$\bar{R}^e + \bar{\Phi}^e = \bar{0}$$

$$-k(G-O) + m\bar{g} + \bar{F}_B + \bar{\Phi}_c = \bar{0}$$

$$\begin{cases} -kx + mg + mg \sin\alpha + \phi_{cx} = 0 \\ -kR \cancel{} - mg \cos\alpha + \phi_{cy} = 0 \end{cases}$$

$$\phi_{cx} = \frac{mg}{R} x_e - mg - mg\frac{1}{2} = mg$$

$$\phi_{cy} = \cancel{mg} + mg + mg\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right) mg$$

(7) $\Rightarrow \bar{\Phi}_c = mg\bar{\imath} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right) mg\,\bar{\jmath}$

Reazione vincolare dinamica

$$\frac{d}{dt}\bar{Q} = \bar{R}^e + \bar{\Phi}^e$$

$$m\bar{a}_G = -k(G-O) + m\bar{g} + \bar{F}_B + \bar{\Phi}_c$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_G = -kx + mg\sin\alpha + mg + \phi_{cx} \\ 0 = -kR - mg\cos\alpha + \phi_{cy} \end{cases}$$

$$\phi_{cx}(t) = m\ddot{x} + \frac{mg}{R}x - \frac{3}{2}mg$$

$$= m\left(-\frac{2}{3}\frac{g}{R}x + \frac{5}{3}g\right) + \frac{mg}{R}x - \frac{3}{2}mg$$

(8) $$= m\frac{g}{3R}x + \frac{mg}{6}$$

noto $x(t)$ trovo $\phi_{cx}(t)$

$$\phi_{cy} = mg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)$$

Diagramma di fase

$$V = -U = \frac{1}{2}\frac{mg}{R}x^2 - 2mgx - mgx\sin\alpha \qquad \alpha = \pi/6$$

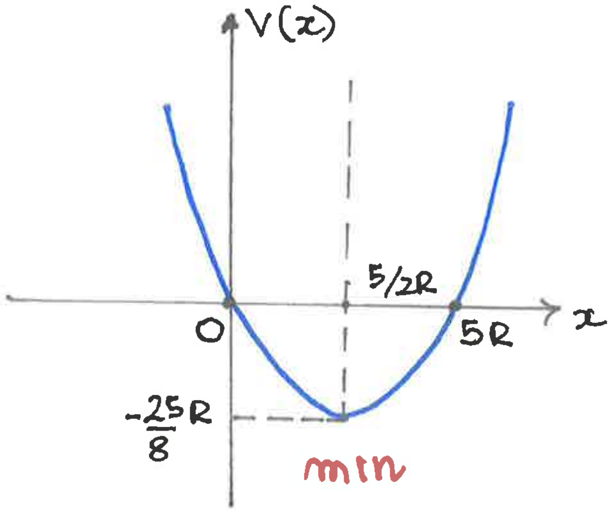
$$= \frac{1}{2}\frac{mg}{R}x^2 - \frac{5}{2}mgx$$

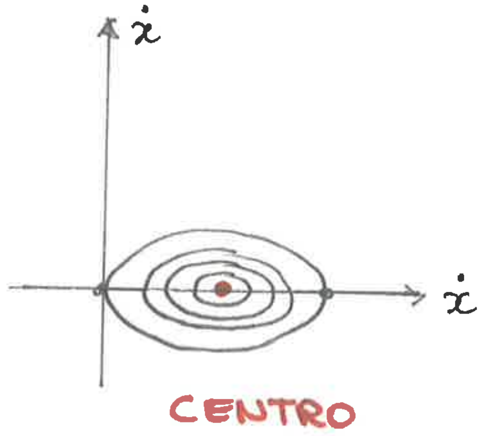
parabola con la concavità rivolta verso l'alto, passante per l'origine che interseca l'asse Ox in O e nel pto di ascissa pari a $5R$.

Il punto $x = \frac{5}{2}R$ è un minimo (era stabile)

Nello spazio delle fasi corrisponde ad un CENTRO.

9





Nell'istante in cui $x = \frac{5}{4}R$ calcolare la velocità di G.

Vale il teorema di conservazione dell'energia $T + U = E$

(integrale primo di moto)

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\,g/R\,x^2 - \frac{5}{2}mgx \overset{=c}{\overline{|}} = E = T_0 + V_0$$

Devo conoscere le condizioni iniziali

Supponiamo che : $\begin{cases} x(0)=0 \\ \dot{x}(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} T_0 \equiv 0 \\ V_0 = -U_0 = -c \end{array}$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}m\dot{x}^2 + mg/R\,x^2 - 5mgx = 0$$

per $x = 5/4\,R$

$$\frac{3}{2}\dot{x}^2 + g/R\cdot\frac{25}{16}R^2 - 5g\cdot\frac{5}{4}R = 0$$

10 $\dot{x}^2 = \frac{25}{8}gR \qquad |\dot{x}| = \sqrt{\frac{25}{8}gR}$

Osservazione

Per calcolare il potenziale della forza peso si può anche procedere così:

$dU = dL = m\bar{g}\cdot dG.$

$$(G - O) = x\,\bar{i} + R\,\bar{j}$$

$$dG = dx\,\bar{i}$$

$$m\bar{g} = mg\sin\alpha\,\bar{i} - mg\cos\alpha\,\bar{j}$$

$$\Rightarrow dL = (mg\sin\alpha\,\bar{i} - mg\cos\alpha\,\bar{j}) \cdot dx\,\bar{i}$$

$$= mg\sin\alpha\,dx$$

$$\Rightarrow U = \int mg\sin\alpha\,dx = mg\sin\alpha\,x + C$$